

Rozbor znalostí matematické analýzy u studentů v závislosti na typu absolvované střední školy

Jaroslav Lindr

Vysoké učení technické v Brně, Stavební fakulta, Ústav společenských věd
e-mail: lindr.j@fce.vutbr.cz

Abstrakt

Úspěšnost vysokoškolských studentů ve zvládnání vysokoškolských partií matematiky je mnohdy dána úrovní středoškolské přípravy.

Aby bylo možné tento fakt prokázat, byl uskutečněn malý sociologický průzkum formou didaktického testu mapujícího znalosti studentů Stavební fakulty VUT v Brně v matematice. Průzkum se zaměřil na znalosti z Diferenciálního a Integrálního počtu funkce jedné proměnné u vybraných studentů 1. ročníku všeobecného směru studia a u studentů oboru Geodézie a kartografie. Konal se v prosinci 2006 a v únoru 2007. Zúčastnilo se ho celkem 262 studentů. Následně byly výsledky vyhodnoceny a statisticky zpracovány pomocí počítačového softwaru *STATISTICA 08*. Byl zjištěn rozdíl mezi výsledky gymnazistů a absolventů SPŠ.

Důraz byl kladen zejména na vyhodnocení vlivu absolvované střední školy na studijní výsledky v matematice u studentů v úvodních semestrech studia technické vysoké školy, kde matematika hraje rozhodující roli ve všeobecném základu a v úspěšnosti studia vůbec.

1 Úvod

Důležitým ukazatelem úspěšnosti studentů ve vysokoškolském studiu matematiky je nesporně typ střední školy, kterou před nástupem na VŠ absolvovali. Je zřejmé, že gymnázia s průměrnou časovou dotací 3-4 hodiny matematiky týdně (+ případný volitelný seminář) představují výbavu, která je z hlediska znalostí matematiky významnější než průprava absolventů SPŠ, kde časová dotace pro výuku matematiky představuje v průměru 2 hodiny týdně.

Obsahová náplň hodin matematiky na gymnáziích napovídá, že studenti jsou alespoň v základech seznámeni s teorií diferenciálního a částečně i integrálního počtu, a tudíž by i úspěšnost v základních teoretických kurzech matematiky na VŠ měla tomuto faktu odpovídat. Sestavený didaktický test z Diferenciálního a Integrálního počtu tyto znalosti studentů prověřoval.

2 Přehled základních výsledků

Na základě zjištěných výsledků sestavených testů (inspirováno [2, 3, 4] a podrobněji v [6]) a po prověření nutných podmínek užití rozhodného statistického testu (normalita dat, shoda rozptylů) (viz [1]), bylo provedeno statistické vyhodnocení údajů. Ke zjištění rozdílnosti úrovně matematických znalostí gymnazistů a absolventů SPŠ z Diferenciálního a Integrálního počtu funkce jedné proměnné byly dále v rámci vědecké úplnosti použity *neparametrické testy*, a to *dvouvýběrový Kolmogorovův – Smirnovův test*, *Waldův – Wolfowitzův test* a *dvouvýběrový Wilcoxonův test*. Byl použit počítačový software *STATISTICA 08*.

2.1 Test z diferenciálního počtu

Na Stavební fakultě VUT proběhl test z Diferenciálního počtu u studentů 1. ročníku oboru Geodézie a kartografie a u studentů 1. ročníku všeobecného směru bakalářského studia oboru

Staviteľství. Zúčastnilo se ho celkem 102 studentů, z toho 54 mužů a 48 žen, z toho 48 gymnazistů a 54 absolventů SPŠ. Test se konal v prosinci 2006 a v březnu 2007. Byl zajištěn regulérní průběh celé akce a studenti byli dopředu informováni o konání testu. V testu byla vždy jen jedna odpověď správná. Test trval 60 minut.

V testech se objevovaly otázky teoretického charakteru zjišťující základní znalosti definic a vět, dále úlohy vedoucí na jednoduché uplatnění teorie v úvahových příkladech až po vlastní výpočetně orientované příklady, kde studenti prokazovali dovednost v matematickém myšlení i aplikaci teorie v praxi. Jako příklad některých testových úloh lze uvést:

1. (1 b.) Nechť f je spojitá na $[a, b]$, má derivaci na (a, b) a $f(a) = f(b)$. Pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$. Přitom existuje:

- právě jedno takové c
- alespoň jedno takové c
- nekonečně mnoho takových c .

2. (1 b.) Ve kterém úhlu protíná křivka $y = \ln x$ osu x ?

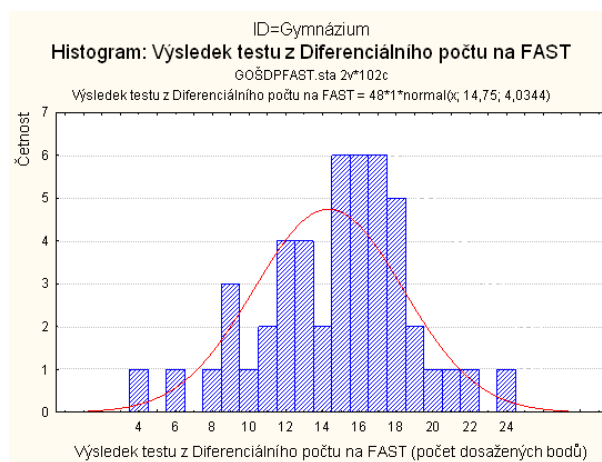
- 45°
- 30°
- 60°

Celkově bylo možné v testu dosáhnout 26 bodů. Přehled výsledků gymnazistů a absolventů SPŠ v testu z Diferenciálního počtu na FAST shrnuje tabulka č. 1:

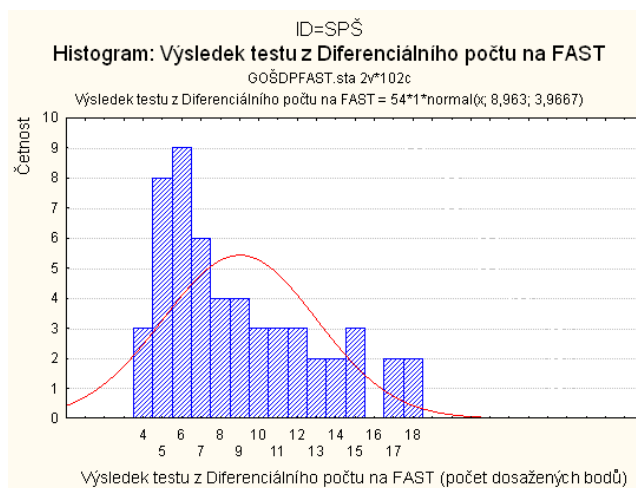
Typ školy	Výsledky testu z Diferenciálního počtu na FAST	Počet
Gymnázium	18 22 15 16 8 17 18 9 17 18 15 17 18 13 20 18 12 11 17 16 16 16 13 13 9 16 11 9 6 12 15 21 15 19 15 19 13 17 14 10 4 24 16 12 15 14 12 17	48
SPŠ	9 8 11 5 10 6 5 18 5 5 17 5 11 7 7 7 7 6 8 6 4 6 7 7 9 10 8 6 4 18 15 6 4 5 14 15 15 12 17 13 11 14 8 6 5 6 5 13 10 12 6 9 9 12	54

Tabulka 1: Výsledky testu z Diferenciálního počtu u absolventů gymnázií a SPŠ na FAST

Přehled výsledků zachycují též jednotlivé histogramy na obr. č. 1 a 2.

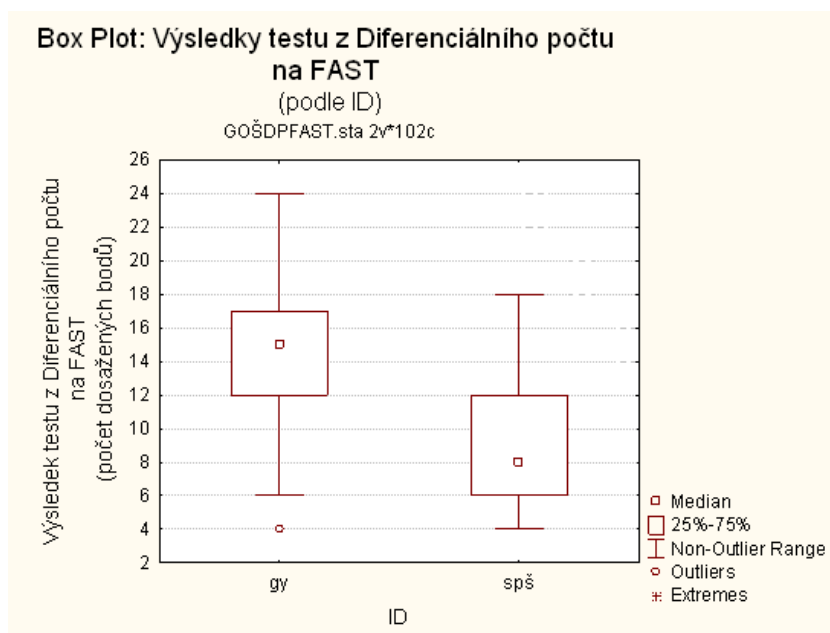


Obrázek 1: Histogram výsledků testu z Diferenciálního počtu u gymnazistů na FAST



Obrázek 2: Histogram výsledků testu z Diferenciálního počtu u absolventů SPŠ na FAST

Z důvodů přehledné vizualizace dat, komparace údajů a následného statistického vyhodnocení jsou výsledky testů znázorněny diagnostickými grafy. *Krabicový diagram (Box Plot)* na obr. č. 3 informuje o vzhledu datového souboru výsledků gymnazistů a absolventů SPŠ v testu z Diferenciálního počtu na FAST jako celku.



Obrázek 3: Krabicový diagram výsledků gymnazistů a absolventů SPŠ v testu z Diferenciálního počtu na FAST

2.2 Statistické vyhodnocení testu

Statistické vyhodnocení spočívá nejprve v ověření normality dat *Shapiroovým – Wilkovým testem*, který sice nezamítl hypotézu o normalitě dat u gymnazistů, ale *Kolmogorovův – Smirnovův test* následně zamítl hypotézu o normalitě dat u absolventů SPŠ. Proto byl ke konečnému rozhodnutí použit *neparametrický test*, a to nejprve *dvouvýběrový Kolmogorovův – Smirnovův test*.

Pomocí něho se ověřovala finální hypotéza H_0 : *Střední hodnoty výsledků gymnazistů a ab-*

solventů SPŠ na FAST v testu z Diferenciálního počtu jsou stejné proti hypotéze H_1 : Střední hodnoty výsledků gymnazistů a absolventů SPŠ na FAST v testu z Diferenciálního počtu jsou různé.

Kolmogorov-Smirnov Test (GOŠDPFAST.sta) By variable ID Marked tests are significant at p <,05000

	Max Neg - Differnc	Max Pos - Differnc	p-level	Mean - gy	Mean - spš	Std.De v. - gy	Std.De v. - spš	Valid N - gy	Valid N - spš
Výsledek testu z Diferenciálního počtu na FAST	0,00	0,553241	p < 0,001	14,75000	8,962963	4,034426	3,966668	48	54

Obrázek 4: Dvouvýběrový Kolmogorovův – Smirnovův test pro výsledky gymnazistů a absolventů SPŠ v testu z Diferenciálního počtu na FAST

Z tabulky je patrné, že p-hodnota testovacího kritéria pro *dvouvýběrový Kolmogorovův – Smirnovův test* $p < 0,001$ znamená, že zamítáme hypotézu H_0 o shodě středních hodnot na hladině významnosti $\alpha = 0,05$.

Dále byl proveden *dvouvýběrový Wilcoxonův test*, ve kterém byla testována tatáž hypotéza H_0 proti H_1 .

Mann-Whitney U Test (GOŠDPFAST.sta) By variable ID Marked tests are significant at p <,05000

	Rank Sum - gy	Rank Sum - spš	U	Z	p-level	Z - adjusted	p-level	Valid N - gy	Valid N - spš	2*1sided - exact p
Výsledek testu z Diferenciálního počtu na FAST	3349,500	1903,500	418,500	5,8808	0,00000	5,896339	0,00000	48	54	0,000000

Obrázek 5: Dvouvýběrový Wilcoxonův test pro výsledky gymnazistů a absolventů SPŠ v testu z Diferenciálního počtu na FAST

Z tabulky je patrné, že hodnota asymptotické testové statistiky pro *dvouvýběrový Wilcoxonův test* je $Z = 5,883038$, příslušná asymptotická p-hodnota $p = 0,00000$ znamená, že zamítáme hypotézu H_0 o shodě středních hodnot na hladině významnosti $\alpha = 0,05$.

V rámci úplnosti byl proveden ještě *Waldův – Wolfowitzův test*, ve kterém byla testována stejná hypotéza H_0 proti H_1 .

Wald-Wolfowitz Runs Test (GOŠDPFAST.sta) By variable ID Marked tests are significant at p <,05000

	Valid N - gy	Valid N - spš	Mean - gy	Mean - spš	Z	p-level	Z adjst d	p-level	No. of - Runs	No. of - ties
Výsledek testu z Diferenciálního počtu na FAST	48	54	14,75000	8,962963	-2,76077	0,005767	2,660911	0,007793	38	32

Obrázek 6: Waldův – Wolfowitzův test pro výsledky gymnazistů a absolventů SPŠ v testu z Diferenciálního počtu na FAST

Z tabulky je patrné, že hodnota asymptotické testové statistiky pro *Waldův – Wolfowitzův test* $Z = 2,76077$, p-hodnota $p = 0,005767$, hodnota asymptotické testové statistiky s opravou na spojitost $Z_{adj} = 2,660911$, p-hodnota pro Z_{adj} $p = 0,007793$ znamená, že zamítáme hypotézu H_0 o shodě středních hodnot na hladině významnosti $\alpha = 0,05$.

V interpretační rovině to znamená, že všechny použité neparametrické testy prokázaly, že výsledky gymnazistů a absolventů SPŠ v testu z Diferenciálního počtu na FAST se významně liší. Tento závěr vyslovujeme s rizikem omylu nejvýše 5 %.

Prokázala se tedy odlišnost v úrovni matematické přípravy studentů ze středních škol. Gymnazisté vykazují lepší znalosti v matematice než absolventi SPŠ. Jelikož se studenti Stavební fakulty VUT rekrutují převážně z odborných průmyslových škol, kde je časová dotace matematiky nízká, problém matematické připravenosti na vysokoškolské studium může sehrávat významnou roli ve zvládnutí učiva.

2.3 Test z integrálního počtu

Test byl realizován u studentů 1. ročníku všeobecného směru Stavitelství. Zúčastnilo se ho celkem 160 studentů, z toho 121 mužů a 39 žen, 48 gymnazistů a 112 absolventů SPŠ. Test proběhl v únoru 2007. Byl zajištěn regulérní průběh celé akce a studenti byli dopředu informováni o jeho konání. V testu byla vždy jen jedna odpověď správná. Test trval 60 minut.

V testech se objevovaly otázky teoretického charakteru zjišťující základní znalosti definic a vět, dále úlohy vedoucí na jednoduché uplatnění teorie v úvahových příkladech až po vlastní výpočetně orientované příklady, kde studenti prokazovali dovednost v matematickém myšlení i aplikaci teorie v praxi. Jako příklad některých testových úloh lze uvést:

1. (1 b.) Která substituce se užije při výpočtu $\int \tan x \, dx$?

$t = \sin x$

$t = \cos x$

$t = \frac{1}{1+x^2}$

2. (2 b.) Integrujte: $\int \frac{1}{x \ln x} \, dx$

$-\frac{1}{x^2} + C$

$\ln |\ln x| + C$

$\ln |x| + C$

3. (3 b.) Vypočtěte substituční metodou: $\int 6 \sin^2 x \cos x \, dx$

$2 \cos^3 x + C$

$2 \sin^3 x + C$

$2 \cos^2 x \sin x + C$

4. (1 b.) Obsah rovinného útvaru, který je omezen částmi křivek $y = x^2$ a $x = y^2$ lze vyjádřit: (Integrál nepočítejte)

$\int_0^1 \sqrt{x} \, dx - \int_0^1 x^2 \, dx$

$\int_0^1 x^2 \, dx - \int_0^1 \sqrt{x} \, dx$

$\int_0^1 \sqrt{y} \, dy - \int_0^1 y^2 \, dy$

5. (4 b.) Integrujte:

$$\int \frac{5x - 4}{x(x + 1)(x - 2)} dx$$

- $2 \ln |x| - 3 \ln |x + 1| + \ln |x - 2| + C$
 $\operatorname{arctg}(x + 1) + \ln |x - 2| + C$
 $5x + \ln |x + 1| + \ln |x - 2| + C$

6. (3 b.) Vypočtete obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami

$$y = e^x; y = e^{-x}; x = -1.$$

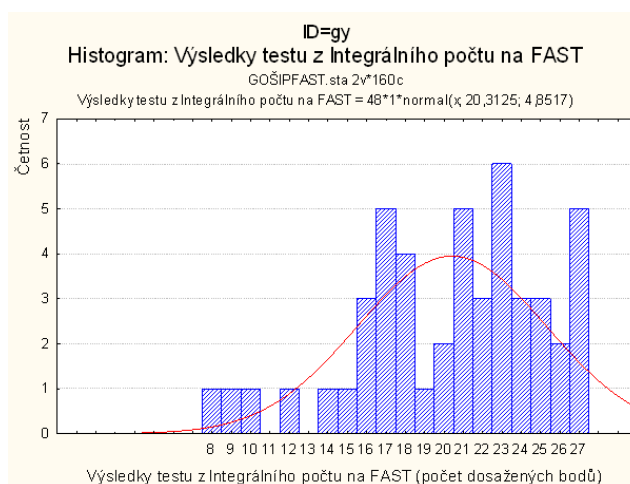
- $\frac{1}{e} + 2e^2$
 $e - 1$
 $e + \frac{1}{e} - 2$

V testu bylo možné celkově získat 28 bodů. Přehled výsledků gymnazistů a absolventů SPŠ v testu z Integrálního počtu na FAST ukazuje tabulka č. 2:

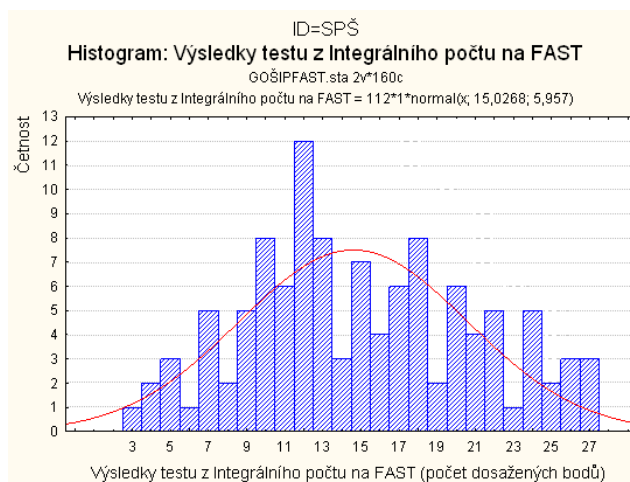
Typ školy	Výsledky testu z Integrálního počtu na FAST	Počet
Gymnázium	9 25 17 18 27 21 16 27 27 8 23 19 22 26 23 17 16 12 20 24 17 23 27 21 25 15 23 21 20 14 27 18 23 21 17 24 17 24 23 10 26 21 22 22 18 18 16 25	48
SPŠ	12 14 16 7 19 21 20 26 9 3 22 12 18 19 10 15 16 9 20 13 26 4 24 22 13 24 25 13 22 18 20 4 8 16 10 21 24 7 24 12 10 12 12 18 25 17 7 5 12 17 21 15 22 9 12 13 21 15 18 27 15 10 17 27 11 18 15 12 13 13 11 12 11 20 18 7 18 26 17 16 17 13 14 10 27 24 11 22 12 14 12 5 9 17 11 9 7 11 10 18 20 15 20 13 10 23 6 8 15 10 5	112

Tabulka 2: Výsledky testu z Integrálního počtu u gymnazistů a absolventů SPŠ na FAST

Přehled výsledků z důvodu orientace a přehlednosti zachycují jednotlivé histogramy na obr. č. 7 a 8.

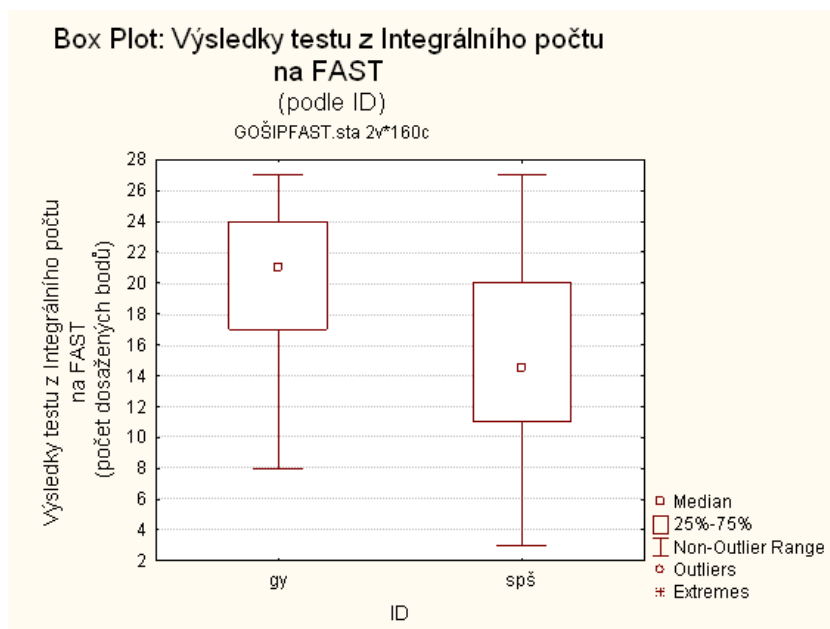


Obrázek 7: Histogram výsledků testu z Integrálního počtu u gymnazistů na FAST



Obrázek 8: Histogram výsledků testu z Integrálního počtu u absolventů SPŠ na FAST

Z důvodů přehledné vizualizace dat, komparace údajů a následného statistického vyhodnocení jsou výsledky testů znázorněny ještě diagnostickými grafy. *Krabicový diagram (Box Plot)* na obr. č. 9 informuje o vzhledu datového souboru výsledků gymnazistů a absolventů SPŠ v testu z Integrálního počtu na FAST jako celku.



Obrázek 9: Krabicový diagram výsledků gymnazistů a absolventů SPŠ v testu z Integrálního počtu na FAST

2.4 Statistické vyhodnocení testu

Vlastní statistické vyhodnocení spočívá nejprve v ověření normality dat. Jelikož v obou případech (gymnazisté i absolventi SPŠ) *Kolmogorovův – Smirnovův test* zamítl hypotézu o normalitě, k rozhodnutí vedly *neparametrické testy*, a to nejprve *dvouvýběrový Kolmogorovův – Smirnovův test*.

Pomocí *dvouvýběrového Kolmogorovova – Smirnovova testu* je ověřována finální hypotéza H_0 : *Střední hodnoty výsledků gymnazistů a absolventů SPŠ v testu z Integrálního počtu na FAST*

jsou stejné, proti hypotéze H_1 : Střední hodnoty výsledků gymnazistů a absolventů SPŠ v testu z Integrálního počtu na FAST jsou různé.

Kolmogorov-Smirnov Test (GOŠIPFAST.sta) By variable ID Marked tests are significant at p <,05000

	Max Neg - Differnc	Max Pos - Differnc	p-level	Mean - gy	Mean - spš	Std.De v. - gy	Std.De v. - spš	Valid N - gy	Valid N - spš
Výsledky testu z Integrálního počtu na FAST	0,00	0,437500	p < .001	20,31250	15,02679	4,851656	5,956993	48	112

Obrázek 10: Kolmogorovův – Smirnovův test pro výsledky gymnazistů a absolventů SPŠ v testu z Integrálního počtu na FAST

Z tabulky je patrné, že p-hodnota testovacího kritéria pro *dvouvýběrový Kolmogorovův – Smirnovův test* $p < 0,001$, znamená, že zamítáme hypotézu H_0 o shodě středních hodnot na hladině významnosti $\alpha = 0,05$.

Dále byl použit *dvouvýběrový Wilcoxonův test*, kterým se testovala stejná hypotéza H_0 : proti H_1 .

Mann-Whitney U Test (GOŠIPFAST.sta) By variable ID Marked tests are significant at p <,05000

	Rank Sum - gy	Rank Sum - spš	U	Z	p-level	Z - adjusted	p-level	Valid N - gy	Valid N - spš
Výsledky testu z Integrálního počtu na FAST	5208,000	7672,000	1344,000	5,004346	0,000001	5,011248	0,000001	48	112

Obrázek 11: Dvouvýběrový Wilcoxonův test pro výsledky gymnazistů a absolventů SPŠ v testu z Integrálního počtu na FAST

Z tabulky je patrné, že hodnota asymptotické testové statistiky pro *dvouvýběrový Wilcoxonův test* $Z = 5,004346$, p-hodnota $p = 0,000001$ znamená, že zamítáme hypotézu H_0 o shodě středních hodnot na hladině významnosti $\alpha = 0,05$.

V rámci vědecké úplnosti byl ještě užit *Waldův – Wolfowitzův test*, kterým se testovala tatáž hypotéza H_0 proti H_1 .

Wald-Wolfowitz Runs Test (GOŠIPFAST.sta) By variable ID Marked tests are significant at p <,05000

	Valid N - gy	Valid N - spš	Mean - gy	Mean - spš	Z	p-level	Z adjst d	p-level	No. of - Runs	No. of - ties
Výsledky testu z Integrálního počtu na FAST	48	112	20,31250	15,02679	-0,794025	0,427181	0,699498	0,484241	64	51

Obrázek 12: Waldův – Wolfowitzův test pro výsledky gymnazistů a absolventů SPŠ v testu z Integrálního počtu na FAST

Z tabulky je patrné, že hodnota asymptotické testové statistiky pro *Waldův – Wolfowitzův test* $Z = 0,794025$, p-hodnota $p = 0,427181$, hodnota asymptotické testové statistiky s opravou na spojitost $Z_{adj} = 0,699498$, příslušná p-hodnota pro Z_{adj} $p = 0,484241$ znamená, že nezamítáme hypotézu H_0 o shodě středních hodnot na hladině významnosti $\alpha = 0,05$. Závěry *Waldova – Wolfowitzova testu* jsou však obecně slabší.

Celkově tedy lze na základě všech dvou ze tří použitých neparametrických statistických testů konstatovat, že výsledky gymnazistů a absolventů SPŠ se v testu z Integrovaného počtu na FAST významně liší.

3 Závěr

Na základě sociologicko-matematického výzkumu a provedených statistických testů konkrétní číselná vyjádření ukazují, že v testech z Diferenciálního i Integrovaného počtu funkcí jedné proměnné se výsledky gymnazistů a absolventů SPŠ významně liší.

Zdůvodnění lze hledat ve faktu, že základy diferenciálního i integrovaného počtu jsou obsahem učebních osnov gymnázií, ne však všech středních průmyslových škol. Je tedy nesporným faktem, že koncepce a postavení matematiky má na těchto typech středních škol odlišné místo, což se projevuje i v následném vysokoškolském studiu.

Prokázala se významnost intenzity matematické přípravy na středních školách ve vazbě na obsah i rozsah učiva s ohledem na celkovou připravenost absolventů na vysokoškolské studium technického směru.

Reference

- [1] BUDÍKOVÁ, M., LERCH, T., MIKOLÁŠ, Š. *Základní statistické metody*. 1. vydání. Brno: skripta PřF MU, 2005. 180 s. ISBN 80 - 210 - 3886 - 1.
- [2] CABRNOCHOVÁ, R., PRACHAŘ, O. *Průvodce předmětem Matematika I. Úlohy z diferenciálního a integrovaného počtu funkcí jedné proměnné*. 1. vydání. Pardubice: Univerzita, 1999. 199 s. ISBN 80 - 7194 - 217 - 0.
- [3] DANĚČEK, J. a kol. *Sbírka příkladů z Matematiky I*. 4. vydání. FAST VUT Brno: CERM, 2000. 110 s. ISBN 80 - 7204 - 163 - 0.
- [4] DOŠLÁ, Z., KUBEN, J. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*. 1. vydání. Brno: skripta PřF MU, 2003. 209 s. ISBN 80 - 210 - 3121 - 2.
- [5] DOUBEK, J. *Diferenciální a integrovaný počet v úlohách. I. část*. 1. vydání. Bratislava: Univerzita Komenského, 1978. 330 s. 63 - 700 - 67.
- [6] LINDR, J. *Tvorba testů z matematické analýzy a jejich vyhodnocování*. Diplomová práce. Brno: PřF MU, 2008. 168 s.