Cvičení z matematické analýzy na FIT VUT s podporou Maple

Vlasta Krupková
Vysoké Učení Technické Brno, Fakulta Elektrotechniky a komunikačních Technologií,
Ústav matematiky, Technická 8,616 00 Brno
e-mail: krupkova@feec.vutbr.cz

Abstrakt

V příspěvku je uvedena ukázka užití Maple pro cvičení v předmětu IMA na FIT . Jedná se o materiál pro první cvičení z matematické analýzy v počítačové učebně, proto je zde v úvodu velmi stručná instruktáž pro práci s tímto softwarem. Samotná kapitola pojednává o funkcích jedné reálné proměnné – zadání, graf, aritmetické opreace, tvoření inverzních a složených funkcí. Na konci každého odstavce je uveden příklad cvičení, které studenti řeší samostatně (na body).

1. Úvod

Současně se vznikem Fakulty informačních technologií VUT byl od akademického roku 2002/2003 akreditován tříletý bakalářský studijní program Informační technologie. Tento program je zaměřen na výchovu absolventů, kteří se v praxi uplatní jako projektanti, konstruktéři, programátoři a údržbáři počítačových systémů, číslicových zařízení, konfigurací počítačů, počítačových sítí, systémů založených na počítačích, jako programátoři a správci databázových systémů a informačních systémů apod. Těžiště matematické náplně tohoto programu je především v Diskrétní matematice a algebře, kde se vyučují partie jako svazy, Booleovské algebry, grafy a základy matematické logiky, které jsou nutné pro další studium speciálních informatických předmětů. Znalost matematické analýzy v těchto předmětech není bezprostředně nutná, proto hodinová dotace předmětu IMA - Matematická analýza byla omezena jen na čtyři týdenní hodiny (dvě hodiny přednášek a dvě hodiny cvičení) v letním semestru prvního ročníku studia. (Poznamenejme, že ve druhém ročníku navazuje ještě předmět Numerické metody a pravděpodobnost).

Při této hodinové dotaci není možný tradiční deduktivní postup, bylo nutné zvolit jinou koncepci. Ta musí vycházet ze základní úvahy – jaké vědomosti by měli studenti mít po absolvování tohoto kursu. Jistě by nemělo jít o mechanickou zručnost v řešení numerických příkladů, spíše o vědomost, ve kterých praktických situacích se metody matematické analýzy uplatní, a dále, co vlastně vypočtený výsledek pro danou situaci znamená. Přitom by výklad měl být také zajímavý – studenti často přicházejí ze střední školy s averzí k matematice (která je ostatně v současné době moderní, kdejaká celebrita se chlubí tím, že matematiku neumí).

Zvláště pro studenty se zájmem o informační technologie je nanejvýš vhodné zařadit do výuky matematický software. Studenti během semestru absolvují pět dvouhodinových cvičení v počítačové učebně. Pro tato cvičení byl sestaven soubor úloh, které studenti řeší s využitím programového souboru Maple, jehož multilicenci VUT má. Přínosem je možnost soustředit se na podstatu problému a ne na numerické výpočty, a dále možnost grafického výstupu, který mnohé matematické pojmy snáze ozřejmí. Ke každému tématu mají navíc studenti předem k dispozici soubor, který demonstruje užití základních příkazů Maple, které se tématu týkají.

2. Vlastní soubor pro výuku

2.1. Jednoduchý úvod do MAPLE

Otevřete si vlastní soubor v novém okně (kliknutím na ikonu pro MAPLE 12) a v něm pracujte. Jakoukoliv část tohoto vzorového souboru si můžete zkopírovat pomocí příslušné značky na horní liště.

MAPLE budeme používat pro zjednodušení výpočtů (jako lepší kalkulačku), pro grafické znázornění řešených problémů a dále jako didaktickou pomůcku - jsou zde obsažena výuková okna pro jednotlivá témata z matematiky - uvidíme dále.

Nejdříve je užitečné seznámit se s prostředím, ve kterém budeme pracovat:

1. Pracovní , které se otevře po stisknutí tlačítka [> na horní liště (a ve kterém je možné celý pracovní soubor strukturovat - vyzkoušejte si možnosti pod **Insert**). Toto tlačítko automaticky otevře Math modus; prostředí je poněkud méně pohodlné. V tomto prostředí lze provádět veškeré výpočty a jiné operace, které MAPLE umožňuje.

Syntaxe výrazu je obvyklá (prozkoumejte Help, který se otevírá klávesou F2), konec příkazu je třeba vyznačit - možnosti jsou dvě. Středník po stisknutí Enter příkaz provede a zobrazí výsledek na nový řádek (uprostřed modře), dvojtečka po stisknutí Enter příkaz provede a výsledek si zapamatuje, ale nezobrazí.

> $1 + 2;$

$$3$$

> $a := 1 + 2:$

> $a; a \cdot a; a + 20;$

$$3$$

$$9$$

$$23$$

(Symbol := je obvyklý přiřazovací příkaz).

2. Textové- v tom je napsán celý tento text; pro psaní textu je zde obvyklý řádek nástrojů pro typ, velikost a styl písma.

I sem je možné vkládat matematické výrazy a příkazy pro operaci s nimi.
Chceme-li vložit matematický symbol, klikneme na tlačítko **Math**, objeví s čárkovaně orámované okénko, do kterého příslušný výraz napíšeme pomocí klávesnice a Mapleovských příkazů, nebo jednodušeji na levé liště otevřeme tlačítkem **Expression** okno s předdefinovanými výrazy, s jejichž pomocí požadovaný výraz napíšeme (další výrazy jsou pod **Common symbols**), např.

$\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}$

V textovém prostředí je matematický výraz ukončen také koncem řádku bez středníku nebo

dvojtečky.
Jestliže při poloze kurzoru v čárkovaném okénku stiskneme Enter, výraz se vypočítá, příkaz provede a výsledek se napíše na nový řádek (doprostřed modře):

$$\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$1$$

Numerické výpočty Maple provádí v tom tvaru, v jakém je výraz zadán - tedy pracuje s racionálními a iracionálními čísly (odmocnina, e, π) v nezaokrouhleném tvaru, s čísly desetinnými tak, jak je zadáme: (následující výraz je zapsán klávesnicí po přepnutí do **Math** pomocí následujících tlačítek:
(1/2 → -1/3 →)^2)

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\frac{1}{36}$$

$$(0.5-0.3333333)^2$$

$$0.0277777888$$

Výsledek ve tvaru desetinného čísla získáme příkazem ***evalf***(vyraz)

$$evalf\left(\frac{11}{3}-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$2.09587034$$

Chceme-li výsledek na jiný počet platných cifer, uvedeme to v příkazu:

$$evalf\left(\frac{11}{3}-\frac{\pi}{2},3\right);\ evalf\left(\frac{11}{3}-\frac{\pi}{2},15\right)$$

$$2.10$$

$$2.0958703398717$$

Na jeden řádek můžeme napsat za sebou více příkazů, musíme je ale oddělit středníkem (nebo dvojtečkou, jestliže si nepřejeme zobrazit výsledek).
Jestliže příkazy napíšeme vedle sebe bez oddělení, provede se jejich součin:

$$evalf\left(\frac{11}{3}-\frac{\pi}{2},3\right)\ evalf\left(\frac{11}{3}-\frac{\pi}{2},15\right)$$

$$4.40132771$$

2.2. Funkce

MAPLE zná celou řadu funkčních předpisů; jejich popis naleznete v Helpu na stránce ***initialfunctions*** (kurzorem najeďte na předchozí slovo a stiskněte F2). Běžné funkce můžete zadat také pomocí výrazů v levé části obrazovky, řádek **Expression**.
(Pozn.: Prozkoumejte funkci tlačítek v horní části obrazovky.)

Funkci zadáváme obvyklým přiřazovacím předpisem:

$$f := x \rightarrow x^2 + 1;$$

$$x \rightarrow x^2 + 1$$

a pak její hodnoty v různých bodech počíttáme opět obvykle:

$$f(1); f(t); f(\mathrm{sqrt}(x)); f(\pi); f(\pi)$$

$$2$$

$$t^2 + 1$$

$$x + 1$$

$$\pi^2 + 1$$

$$\pi^2 + 1$$

(číslo π můžeme zadat dvojím způsobem - pomocí tlačítka v **Common symbols**nebo slovem Pi s velkým P)
Chceme-li numerickou hodnotu posledního výrazu, použijeme příkaz ***evalf*** (eval - zkratka od evaluate=vyhodnotit, f - zkratka pro float=plovoucí, neboli v pohyblivé řádové čárce); opět lze nalézt v Helpu, a tlačítko pro procenta, které reprezentuje poslední vypočtený výraz:

$evalf(\%);$

$$10.8696044($$

Jestliže provedeme přiřazení
$g := x^2 - 1;$

$$x^2 - 1$$

zadali jsme výraz, který určuje hodnotu funkce, ne funkci. Proto napíšeme-li
$g(2)$

$$x(2)^2 - 1$$

nedostaneme hledanou funkční hodnotu. Tu můžeme získat substitucí do zadaného výrazu, tedy příkazem ***subs***:
$subs(x = 2, g);$

$$3$$

Pro zadání funkce po částech má MAPLE příkaz ***piecewise***: (povšimněte si zadání třetí odmocniny!)
$h := x \rightarrow piecewise(x \le 0, \mathrm{surd}(x, 3), x^2) : h(x);$

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} & x \le 0 \\ x^2 & otherwise \end{cases}$$

$h1 := x \rightarrow piecewise(x < 0, -1, x < 1, 0, 1) : h1(x); h1(-1); h1(0);$

$$\begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x < 1 \\ 1 & otherwise \end{cases}$$

$$-1$$

$$0$$

$(h(x))^2; simplify(\%);$

$$\left(\begin{cases} \sqrt[3]{x} & x \le 0 \\ x^2 & otherwise \end{cases}\right)^2$$

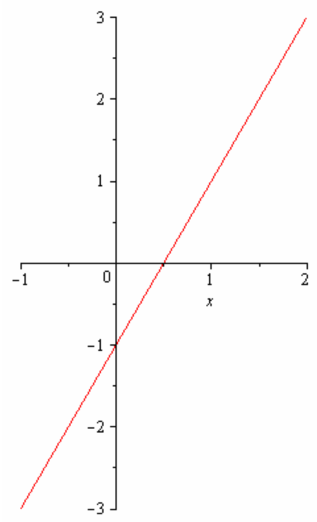
$$\begin{cases} (-x)^{2/3} & x \le 0 \\ x^4 & 0 < x \end{cases}$$

2.3. Graf funkce

Graf funkce se nakreslí pomocí příkazu ***plot***, jehož základní tvar je ***plot*** (funkce , proměnná

= dolní mez .. horní mez);

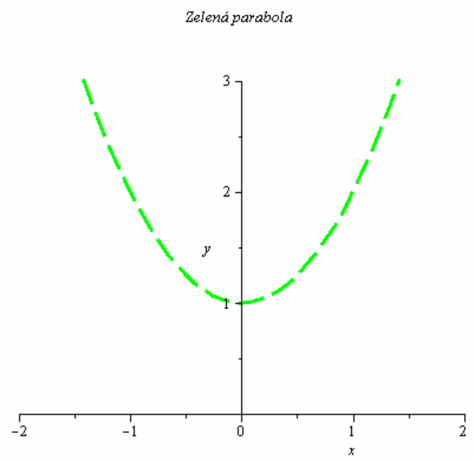
$plot(2x - 1, x = -1..2);$



Další možnosti pro způsob vykreslení grafu naleznete v Helpu (tlačítko F2 s kurzorem na slově ***plot***); například:

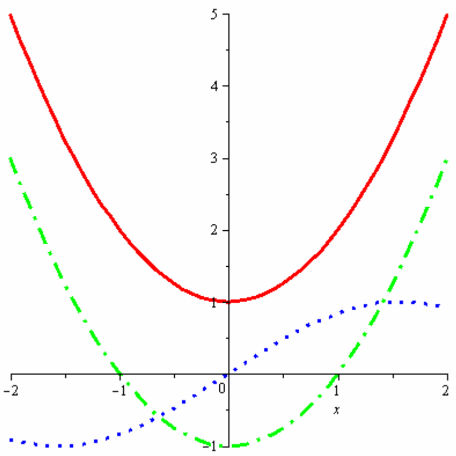
$f := x \to x^2 + 1:$

$plot(f(x), x = -2..2, y = 0..3, color = green, linestyle = 3, scaling = constrained, thickness = 3,$
$title = "Zelená\ parabola");$



Více grafů v jednom obrázku - zadáme seznam funkcí v hranatých závorkách, potom další jejich parametry opět jako seznam:

$plot\left([f(x), \sin(x), x^2 - 1], x = -2..2, color = [red, blue, green], linestyle = [1, 2, 4], thickness = 3\right);$



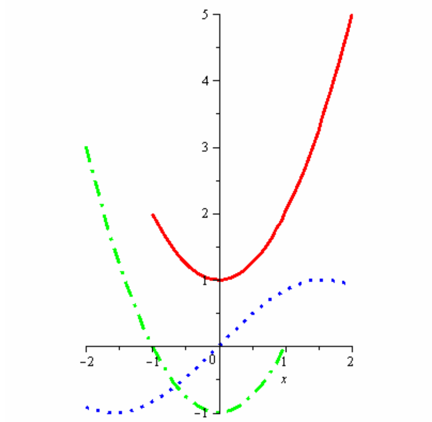
Můžeme také použít příkaz ***display*** z knihovny ***plots*** (kterou nejdříve musíme zavolat!)

$a := plot(f(x), x = -1..2, color = red, linestyle = 1, thickness = 3):$

$b := plot(\sin(x), x = -2..2, color = blue, linestyle = 2, thickness = 3):$

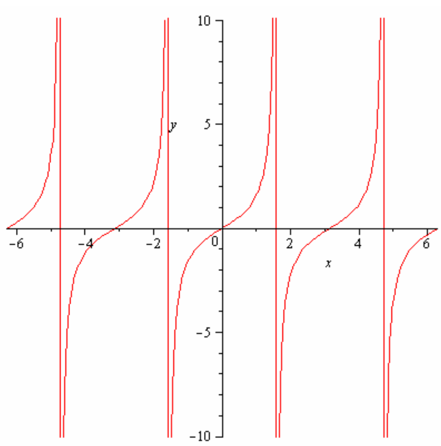
$c := plot(x^2 - 1, x = -2..1, color = green, linestyle = 4, thickness = 3):$

$with(plots): display(a, b, c, scaling = constrained);$

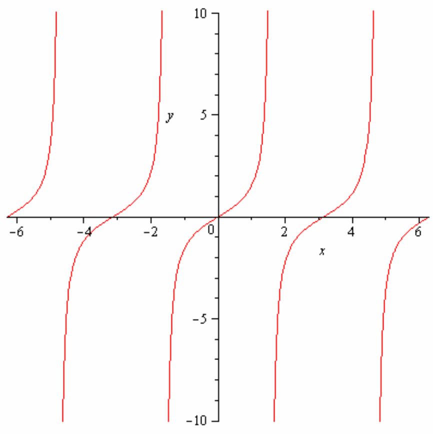


Příkaz ***scaling = constrained*** způsobí v obrázku stejné měřítko na obou osách. Je-li funkce nespojitá, je vhodné v příkazu ***plot*** zadat ***discont = true*** (discontinuous = nespojitý). Srovnejte:

$plot\left(\tan(x), x = -2\cdot\pi..2\cdot\pi, y = -10..10\right);$



$plot\left(\tan(x), x = -2\cdot\pi..2\cdot\pi, y = -10..10, discont = true\right);$

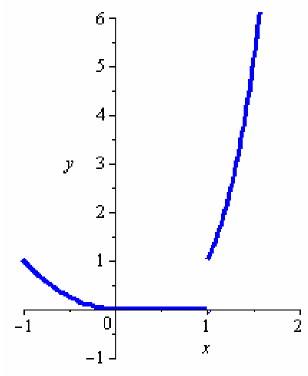


Pomocí stejných příkazů se kreslí i funkce zadané po částech:

$f1 := x \to piecewise(x < 0, x^2, x \le 1, 0, 1 < x, x^4) : f1(x);$

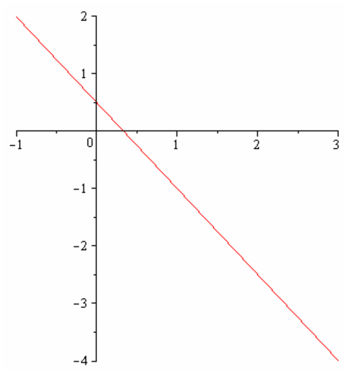
$$\begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 0 & x \le 1 \\ x^4 & 1 < x \end{cases}$$

$plot(f1(x), x = -1..2, y = -1..6, discont = true, thickness = 3, color = blue);$



Je možné také kreslit funkce zadané parametricky.
Příkaz pro vykreslení křivky dané parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t), y = \psi(t), t = t1..t2$ je **plot** ($[\varphi(t), \psi(t), t = t1..t2]$); Všimněte si, že meze pro *t* jsou uvnitř hranatých závorek! Za koncem hranatých závorek mohou být i různé další volby, např. barva, rozměry výřezu, který chceme vidět atd. Úsečka od bodu [-1,2] do bodu [3,-4]:

$plot([-1 + 4 \cdot t, 2 - 6 \cdot t, t = 0..1]);$

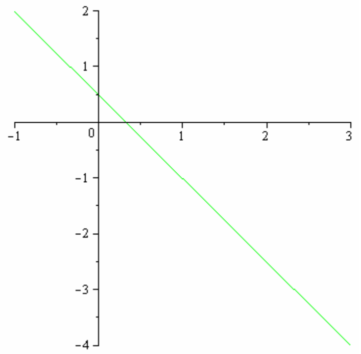


nebo můžeme napřed zadat funkce a pak teprve kreslit, pro změnu zelenou barvou:

$xx := -1 + 4 \cdot t; yy := 2 - 6 \cdot t; plot([xx, yy, t = 0..1], color = green);$

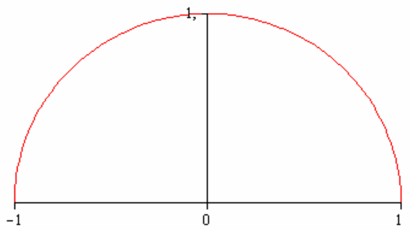
$-1 + 4t$

$2 - 6t$

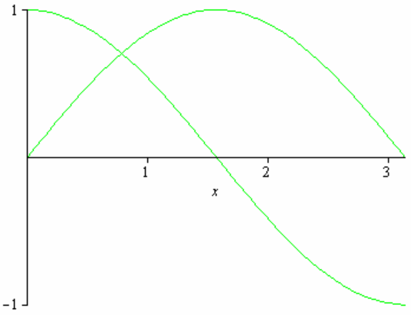


Pokud meze pro proměnnou napíšeme vně hranatých závorek, výsledkem nebude křivka určená parametricky, ale dva grafy v jednom obrázku.Můžete porovnat:

$plot\left([\cos(x), \sin(x), x = 0..\pi], color = red, tickmarks = [3,2], scaling = constrained\right);$



$plot\left([\cos(x), \sin(x)], x = 0..\pi, color = green, tickmarks = [3,2]\right);$



Pomocí parametrického zadání můžeme nakreslit celou řadu obrázků, např. :

(Ve vlastním textu je uveden postup, jak se stromeček nakreslí – autor Dr. Irena Hlavičková).

Cvičení:

1 . Nakreslete graf funkce $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$ spolu s jejími asymptotami; graf funkce modře tučně, asymptoty černě čárkovaně.

2. Nakreslete graf funkce $f(x)=\begin{cases} |x| & x<1 \\ 2\cdot x-1 & x\ge 1 \end{cases}$.

Pomocí svislých a vodorovných úseček v grafu vyznačte

a) obraz intervalu $\left\langle \frac{1}{2}, 2\right\rangle$,

b) úplný vzor intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

2.4. Aritmetické operace s funkcemi

Vzorový příklad:

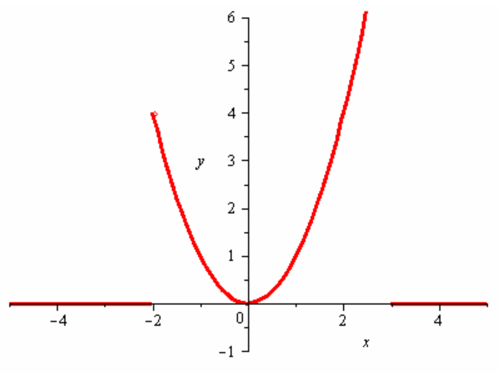
1. Nakreslete graf funkce $f(x)=x^2$ pro $-2\le x$ a $x\le 3$, $f(x)=0$ pro ostatní *x*.
2. Nakreslete graf funkce $f_1(x)=f(x+2)$.
3. Nakreslete funkce $f(x)$ a $f_1(x)$ do jednoho grafu.

Řešení:

$f := x \to piecewise\left(-2\le x \textbf{ and } x\le 3, x^2, 0\right): f(x);$

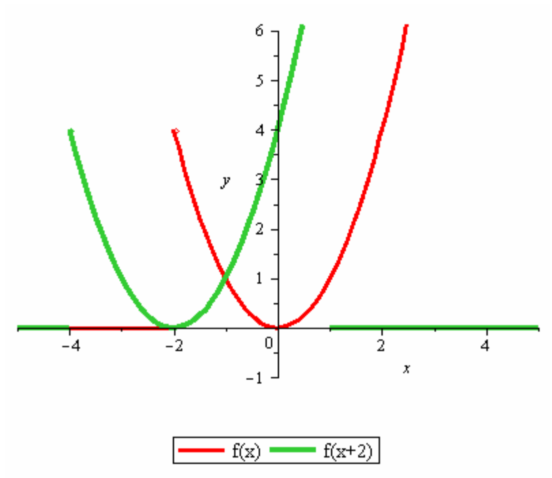
$plot\left(f(x), x=-5..5, y=-1..6, discont=true, thickness=3\right);$

$$\begin{cases} x^2 & -2\le x \textbf{ and } x\le 3 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$



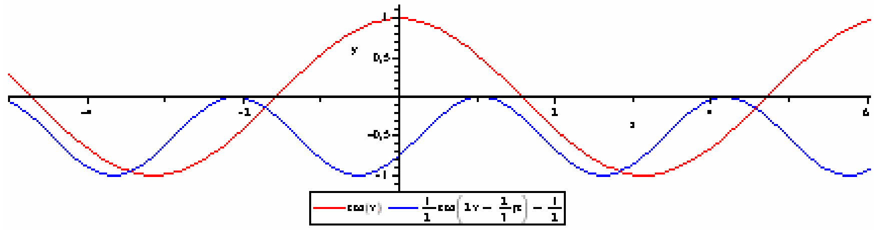
$f1 := x \to f(x+2):$

$plot([f(x), f1(x)], x=-5..5, y=-1..6, discont=true, thickness=[3,4], legend=["f(x)","f(x+2)"]);$



Můžete si vyzkoušet, jak se mění grafy elementárních funkcí tvaru $a \cdot f(b \cdot (x-h)) + k$ při různé volbě konstant *a,b,h,k* pro některou ze základních funkcí - MAPLE má k tomuto účelu pracovní okno, které otevřete tak, že na horní liště kliknete na **Tools - Tutors - Precalculus - StandardFunctions**.

Následuje obrázek, který byl vložen z výukového okna pro volbu
$f(x) = \cos(x),\ a = \frac{1}{2},\ b = 2,\ h = \frac{\pi}{3},\ k = -\frac{1}{2}$ – po kliknutí na tlačítko **Close** :



Cvičení:

1 . Pro funkci f ze vzorového příkladu analogicky nakreslete graf funkce

a) $f_2(x) = f(2x)$

b) $f_3(x) = f(x) + 2$

c) $f_4(x) = 2f(x)$

2. a) Nakreslete graf funkce $g(x) = \begin{cases} x & -1 \le x \le 1 \\ 0 & x < -1 \textbf{ and } x > 1 \end{cases}$.

b) Nakreslete grafy funkcí $g(|x|)$ a $|g(x)|$.

2.5. Inverzní funkce

Hledáme-li k funkci s předpisem $y = f(x)$ inverzní funkci, hledáme funkci g tak, že platí $g(f(x)) = x$.
Budeme využívat příkaz ***solve*** pro nalezení řešení rovnice (viz Help); například řešení rovnice $e^{x-4} = 1$ vypočteme takto:
$reseni := solve(\exp(x-4) = 1, x);$

Hledejme inverzní funkci k funkci $f(x)=1+\sqrt{3+e^{2x}}$:

$restart: f := x \to 1+\mathrm{sqrt}(3+\exp(2\cdot x)) : f(x);$

$$1+\sqrt{3+e^{2x}}$$

Hodnotu inverzní funkce definujeme jako řešení rovnice $f(y)=x$ vzhledem k y:

$invf := x \to solve(f(y)=x, y) : invf(x);$

$$\frac{1}{2}\ln\left(-2-2x+x^2\right)$$

Provedeme zkoušku - vypočteme inverzní předpis k získanému *invf*:

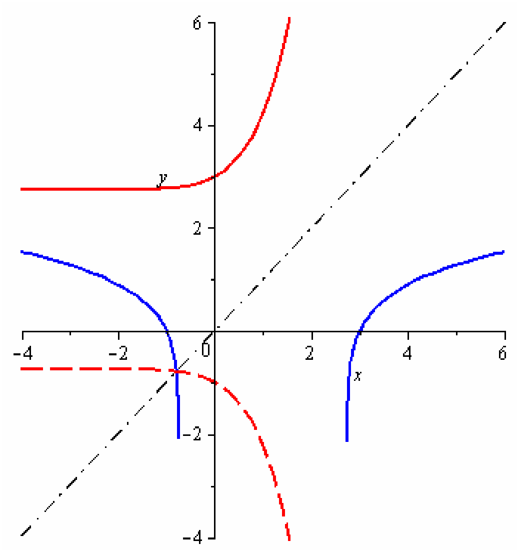
$solve(invf(x)=y, x);$

$$1+\sqrt{3+e^{2y}}, 1-\sqrt{3+e^{2y}}$$

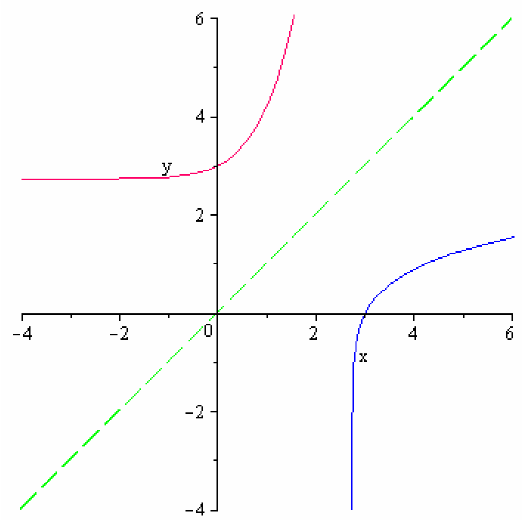
Vyšly nám dva předpisy - proč?

Pro ilustraci nakreslíme obrázek:

$plot[f(x), invf(x), 2-f(x), x], x=-4..6, y=-4..6, color=[red, blue, red, black],$
$thickness=[2,2,2,1], linestyle=[1,1,3,4]);$



Pro určení inverzní funkce má MAPLE také výukové okno:
Tools - Tutors - Calculus SingleVariable - FunctionInverse.
Po otevření tohoto okna nůžete vložit svou funkci (kterou napíšete nebo zkopírujete) a zjistit inverzní - vzorec i graf. Následuje obrázek, který takto dostaneme pro předchozí funkci. Je vidět, že MAPLE vybere správnou větev.



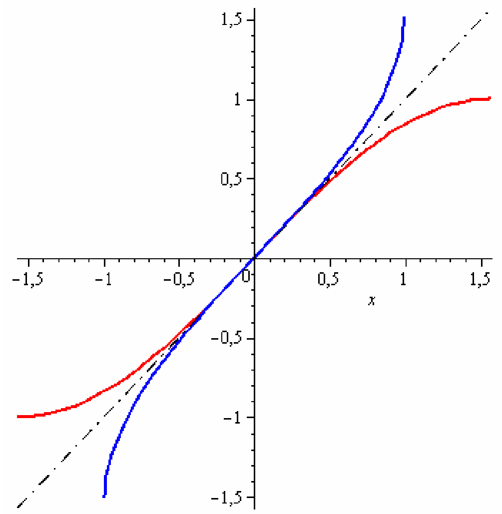
Pro některé funkce (v Helpu ***inifcns*** -"Initially Known Functions") umí MAPLE inverzní funkci najít pomocí příkazu $f@@(-1)$:

$invsin := \sin@@(-1);$

arcsin

Nakreslíme obrázek:

$plot\left([\sin(x), x, invsin(x)], x = -\frac{\pi}{2}..\frac{\pi}{2}, color = [red, black, blue], thickness = [2,1,2], linestyle = [1,4,1]\right);$



Cvičení:

1 . Najděte inverzní funkci k funkcím $\cos(x)$ a tg (x) (v MAPLE $\tan(x)$) a nakreslete vždy do jednoho obrázku funkci zadanou a nalezenou inverzní.

2 . Totéž udělejte pro funkci $f(x) = 1 + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. Pozor na definiční obory!

3. Jsou dány funkce f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 a dále funkce g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 pomocí následujících předpisů:

$$f_1(x) = \frac{1}{x+2},\ f_2(x) = \frac{x}{x-1},\ f_3(x) = 3 + \frac{1}{x},\ f_4(x) = \frac{x}{2} - 2,\ f_5(x) = \frac{x}{x+1},$$

$g_1(x)=\dfrac{x}{1-x}$, $g_2(x)=\dfrac{x}{x-1}$, $g_3(x)=\dfrac{1}{x}-2$, $g_4(x)=\dfrac{1}{x-3}$, $g_5(x)=2x+4$.

Mezi funkcemi g_j najděte inverzní funkce ke všem funkcím f_i, a to nejdříve odhadem, a poté se přesvědčte výpočtem, event. pomocí obrázku o správnosti svého úsudku.

2.6. Složená funkce

Kompozici funkcí je možné utvořit pomocí operačního znaménka @:

$f := x \to \sqrt{x}\ : g := x \to 2 - 3\sin(x)\ : f(x);\ g(x);$

$$\sqrt{x}$$

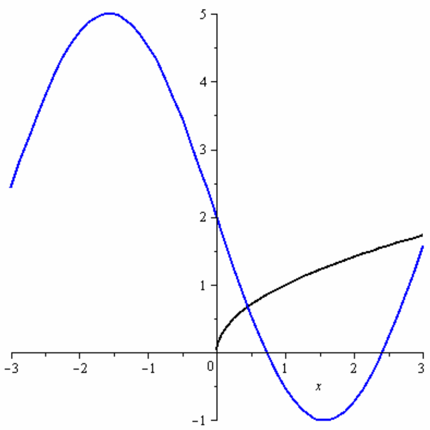
$$2 - 3\sin(x)$$

$(f@g)(x);\ (g@f)(x);$

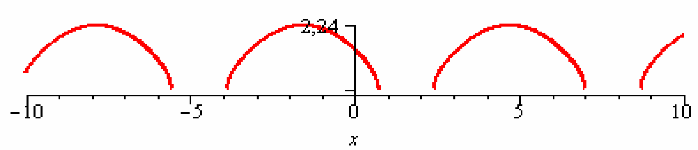
$$\sqrt{2 - 3\sin(x)}$$

$$2 - 3\sin\left(\sqrt{x}\right)$$

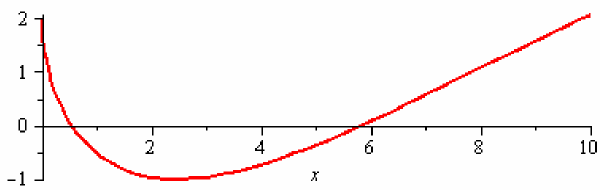
$plot([f(x), g(x)], x = -3..3, color = [black, blue], thickness = 2);$



$plot((f@g)(x), x = -10..10, thickness = 2, numpoints = 3000, scaling$
$= constrained, ytickmarks = 2);$



$plot((g@f)(x), x = 0..10, thickness = 2, scaling = constrained);$



MAPLE umí skládat i funkce zadané počástech:

$f := x \to \dfrac{x + |x|}{2}\ : g := x \to piecewise\left(x < 0, x, x^2\right)\ : f(x);\ g(x);$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}|x|$$

$$\begin{cases} x & x < 0 \\ x^2 & otherwise \end{cases}$$

$simplify((f@g)(x)); simplify((g@f)(x));$

$$\begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x^2 & 0 < x \end{cases}$$

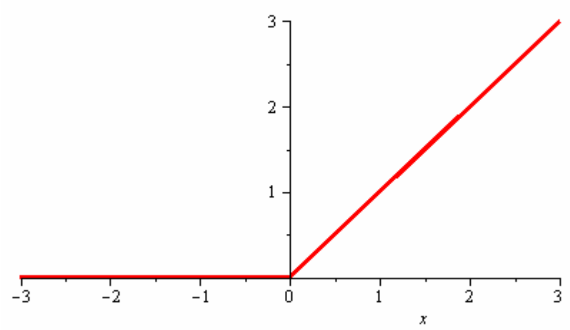
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}|x| & \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}|x| < 0 \\ \frac{1}{4}(x + |x|)^2 & otherwise \end{cases}$$

Vyřešíme podmínku pro druhou složenou funkci:

$solve\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}|x| < 0, x\right);$

MAPLE nezobrazil žádný výsledek - nerovnost nemá řešní, jak se můžeme přesvědčit pomocí grafu:

$plot\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}|x|, x = -3..3, thickness = 3, scaling = constrained\right);$



První podmínku pro druhou funkci tedy nesplňuje žádné x a platí:

$$(g@f)(x) = \frac{1}{4}\cdot(x + |x|)^2$$

$$g(f(x)) = \frac{1}{4}(x + |x|)^2$$

Cvičení:

1 . Ukažte, že každá z následujících funkcí splňuje vztah $(f@(f@f))(x) = x$:

a) $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$, b) $f(x) = 2 - \frac{1}{x-1}$, c) $f(x) = -\frac{1}{x+1}$, d) $f(x) = a - \frac{1}{x+b}$, kde $a + b = 1$.

2 . Jsou dány funkce f a g pomocí vztahů

$$f(x) = \begin{cases} |x| & x < 1 \\ 2\cdot x - 1 & x \ge 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & x < 0 \\ x + 2 & x \ge 0 \end{cases}$$

a) Nakreslete jejich grafy.
b) Najděte

$\left(f @ g\right)(0), \left(f @ g\right)(1), \left(f @ g\right)(-2), \left(f @ f\right)(-1), \left(f @ f\right)(-2),$

$\left(g @ f\right)(0),\ \left(g @ f\right)(-1), \left(g @ f\right)(-2), \left(g @ g\right)(1), \left(g @ g\right)(-1).$

c) Řešte vzhledem k x :

$f(x) = 0,\ g(x) = 0,\ f(x) = x,\ g(x) = x,\ f(x) = g(x), \left(f @ g\right)(x) = 1, \left(g @ f\right)(x) = 1.$

d) Ukažte, že platí $f(x) \geq 0$ pro všechna x .

e) Zjistěte, kdy je $g(x) < 0$

f) Ukažte, že platí $\left(f @ g\right)(x) \geq 0$ pro všechna x .

g) Existuje inverzní funkce k funkci f?

h) Existuje inverzní funkce k funkci $g @ f$?

i) Najděte předpis pro funkci $f @ g$ a nakreslete její graf.

Poděkování: Práce byla podpořena grantem FRVŠ 1795/2006