Stabilita stacionárního proudění v rotačně symetrické válcové oblasti

Libor Čermák

VUT v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky

e-mail: cermak@fme.vutbr.cz

Abstrakt

Předmětem práce je posouzení stability stacionárního proudění mezi dvěma souosými válci. Stacionární proudění je určeno konstantní axiální rychlostí ve směru osy válce a konstantní úhlovou rychlostí. Stabilitu vyšetřujeme pomocí vlastních čísel linearizovaných Eulerových rovnic. Diskretizace je provedena metodou spektrálních prvků. Algoritmus je implementován v MATLABu. Numerické experimenty na reálných datech prokázaly, že stacionární proudění je stabilní.

Nechť $C_0 > 0$ je konstantní axiální rychlost a Ω je konstantní úhlová rychlost zkoumaného stacionárního proudění. Rovnice popisující pohyb nevazké nestlačitelné tekutiny v cylindrickém souřadném systému rotujícím okolo osy x úhlovou rychlostí Ω jsou uvedeny např. v [2]. Pro posouzení stability použijeme z nich odvozené linearizované Eulerovy rovnice

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial t} + C_0 \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = 0\,,\\
&\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} + C_0 \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial x} - 2\Omega \tilde{v}_\varphi + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} = 0\,,\\
&\frac{\partial \tilde{v}_\varphi}{\partial t} + C_0 \frac{\partial \tilde{v}_\varphi}{\partial x} + 2\Omega \tilde{v}_r + \frac{1}{\varrho r}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \varphi} = 0\,,
\end{aligned} \tag{1}$$

kde $\tilde{v}_x$, $\tilde{v}_r$ a $\tilde{v}_\varphi$ jsou malé poruchy axiální, radiální a obvodové rychlosti, $\tilde{p}$ je malá porucha tlaku a ϱ je hustota. Splněna musí být také rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tilde{v}_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{v}_\varphi}{\partial \varphi} = 0\,. \tag{2}$$

Úlohu řešíme v oblasti $Q = \{(x, r, \varphi)\,|\,0 < x < L, 0 < R_1 < r < R_2, 0 \le \varphi < 2\pi\}$. Okrajové podmínky jsou předepsány takto: pro $x = 0$ je $\tilde{v}_x = \tilde{v}_r = \tilde{v}_\varphi = 0$, pro $x = L$ a $r = R_1$ je $\tilde{p} = 0$ a pro $r = R_2$ je $\tilde{v}_r = 0$. Máme ověřit, zda porucha vymizí, tj. jestli

$$(\tilde{v}_x, \tilde{v}_r, \tilde{v}_\varphi, \tilde{p}) \to (0,0,0,0) \qquad \text{pro } t \to \infty. \tag{3}$$

Nechť $I = \sqrt{-1}$ je imaginární jednotka a n je přirozené číslo. Užitím transformace

$$(\tilde{v}_x, \tilde{v}_r, \tilde{v}_\varphi, \tilde{p}) = e^{\lambda t + In\varphi}(\bar{v}_x, \bar{v}_r, \bar{v}_\varphi, \bar{p}) \tag{4}$$

vyloučíme čas t i souřadnici φ a dostaneme problém vlastních čísel

$$\begin{aligned}
&C_0 \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \lambda \bar{v}_x = 0\,, \\
&C_0 \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial x} - 2\Omega \bar{v}_\varphi + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \lambda \bar{v}_r = 0\,, \\
&C_0 \frac{\partial \bar{v}_\varphi}{\partial x} + 2\Omega \bar{v}_r + \frac{nI}{\varrho r}\bar{p} + \lambda \bar{v}_\varphi = 0\,, \\
&\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{v}_r) + \frac{nI}{r}\bar{v}_\varphi = 0\,.
\end{aligned} \tag{5}$$

Zde λ je vlastní číslo a $\bar{v}_x$, $\bar{v}_r$, $\bar{v}_\varphi$ a $\bar{p}$ jsou vlastní funkce proměnných x a r v obdélníkové oblasti $D = \{(x,r)\,|\,0 < x < L, R_1 < r < R_2\}$ splňující nulové okrajové podmínky

$$\begin{aligned}
&\bar{v}_x = \bar{v}_r = \bar{v}_\varphi = 0 \quad \text{pro } x = 0, \qquad && \bar{p} = 0 \quad \text{pro } x = L, \\
&\bar{p} = 0 \quad \text{pro } r = R_1, && \bar{v}_r = 0 \quad \text{pro } r = R_2.
\end{aligned} \tag{6}$$

Člen $e^{\lambda t + In\varphi}$ použitý v transformaci v (4) tedy převádí nestacionární úlohu v trojdimenzionální oblasti Q na problém vlastních čísel ve dvoudimenzionální oblasti D. Rotačně symetrické úloze odpovídá případ $n = 0$.

Stabilita vyjádřená podmínkou (3) nastane, právě když všechna vlastní čísla úlohy (5) - (6) mají zápornou reálnou složku.

Diskretizaci provedeme metodou spektrálních prvků, viz [1]. Oblast D rozdělíme na $n_x \times n_r$ shodných obdélníkových prvků a na nich aproximujeme vlastní funkce pomocí Lagrangeových interpolačních polynomů stupně N v každé z proměnných x a r. Za uzly interpolace volíme uzly součinové Gaussovy-Lobattovy-Legendrovy formule řádu $2N - 1$. Diskretizovaný problém vlastních čísel získáme kolokační metodou tak, že požadujeme splnění rovnic (5) - (6) v uzlech GLL formulí. Program napsaný v MATLABu sestaví matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ ($\mathbf{A}$ regulární, obecně komplexní, $\mathbf{B}$ diagonální, reálná ale singulární) a zobecněný problém vlastních čísel $\mathbf{Au} = \lambda\mathbf{Bu}$ počítá užitím funkce `eig` nebo `eigs`.

Výpočty jsme prováděli pro data odpovídající konkrétnímu technickému zadání. Zvolili jsme $R_1 = 0{,}015$, $R_2 = 0{,}15$, $L = 0{,}5$, $\varrho = 1000$ a experimentovali jsme s hodnotami pro $C_0, \Omega \in \langle 0, 100\rangle$. Výpočty jsme prováděli pro $n = 0, 1, 2, 3$. Věrohodné výsledky jsme obdrželi už pro jediný prvek, tj. když $n_x = n_r = 1$, a pro aproximaci vlastních funkcí pomocí polynomů stupně $N = 8$. Ve všech testovaných případech jsme dostali vlastní čísla se zápornou reálnou složkou. Analýzou získaných výsledků jsme dospěli k závěru, že zkoumané stacionární proudění je stabilní.

Literatura

[1] G. E. Karniadakis, S. J. Sherwin: *Spectral/hp Element Methods for Computational Fluid Dynamics,* Oxford University Press, Oxford, 2005.

[2] M. P. Païdoussis: *Fluid–Structures interactions,* Elsevier Academic Press, San Diego, 2004.