

Stabilita stacionárního proudění v rotačně symetrické válcové oblasti

Libor Čermák

VUT v Brně, Fakulta strojíního inženýrství, Ústav matematiky

e-mail: cermak@fme.vutbr.cz

Abstrakt

Předmětem práce je posouzení stability stacionárního proudění mezi dvěma sousými válci. Stacionární proudění je určeno konstantní axiální rychlostí ve směru osy válce a konstantní úhlovou rychlostí. Stabilitu vyšetřujeme pomocí vlastních čísel linearizovaných Eulerových rovnic. Diskretizace je provedena metodou spektrálních prvků. Algoritmus je implementován v MATLABu. Numerické experimenty na reálných datech prokázaly, že stacionární proudění je stabilní.

1. Rovnice proudění

Nechť C_0 je konstantní axiální rychlost a Ω je konstantní úhlová rychlost zkoumaného stacionárního proudění. Pohyb nevazké nestlačitelné tekutiny v cylindrickém souřadném systému rotujícím okolo osy x úhlovou rychlostí Ω popisují Eulerovy rovnice

$$\begin{aligned}\frac{Dv_x}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\varphi^2}{r} - 2\Omega v_\varphi - \Omega^2 r + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= 0, \\ \frac{Dv_\varphi}{Dt} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + 2\Omega v_r + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} &= 0.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Zde v_x , v_r a v_φ jsou postupně axiální, radiální a obvodová rychlost, p je tlak,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}\tag{1.2}$$

je materiálová derivace a ρ je hustota. Splněna musí být také rovnice kontinuity

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0.\tag{1.3}$$

Rovnice (1.1) - (1.2) lze najít např. v [6]. Úlohu řešíme v oblasti Q mezi dvěma souosými válci,

$$Q = \{(x, r, \varphi) \mid 0 < x < L, R_1 < r < R_2, 0 \leq \varphi < 2\pi\}, \quad (1.4)$$

kde L je výška válců, $R_1 > 0$ je poloměr vnitřního válce a $R_2 > R_1$ je poloměr vnějšího válce.

Předpokládejme, že stacionární proudění v rotujícím souřadném systému je určeno funkcemi

$$v_x = C_0 > 0, \quad v_r = 0, \quad v_\varphi = 0, \quad p = p_0 := \frac{1}{2}\rho\Omega^2 r^2 \quad (1.5)$$

a jim odpovídajícími okrajovými podmínkami:

na „vtoku“ $x = 0$ jsou předepsány všechny složky rychlosti v_x , v_r a v_φ , na „vnitřním plášti“ $r = R_1$ je předepsán tlak p , na „vnějším plášti“ $r = R_2$ je předepsána radiální složka rychlosti v_r a na „výtoku“ $x = L$ je předepsán tlak p .

2. Stabilita

K vyšetření stability použijeme standardní postup: ke stacionárnímu proudění přidáme malou poruchu, tj.

$$(v_x, v_r, v_\varphi, p) = (C_0, 0, 0, p_0) + (\tilde{v}_x, \tilde{v}_r, \tilde{v}_\varphi, \tilde{p}), \quad (2.1)$$

a ověříme, zda $(v_x, v_r, v_\varphi, p) \rightarrow (C_0, 0, 0, p_0)$ pro $t \rightarrow \infty$. Dosadíme-li z (2.1) do (1.1) a zanedbáme malé členy (obsahující součiny dvou proměnných opatřených vlnkou), dostaneme linearizované Eulerovy rovnice

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial t} + C_0 \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} + C_0 \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial x} - 2\Omega \tilde{v}_\varphi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{v}_\varphi}{\partial t} + C_0 \frac{\partial \tilde{v}_\varphi}{\partial x} + 2\Omega \tilde{v}_r + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

a rovnici kontinuity

$$\frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \tilde{v}_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_\varphi}{\partial \varphi} = 0. \quad (2.3)$$

Máme ověřit, zda

$$(\tilde{v}_x, \tilde{v}_r, \tilde{v}_\varphi, \tilde{p}) \rightarrow (0, 0, 0, 0) \quad \text{pro } t \rightarrow \infty. \quad (2.4)$$

3. Problém vlastních čísel

Nechť $I = \sqrt{-1}$ je imaginární jednotka a n je přirozené číslo. Užitím transformace

$$(\tilde{v}_x, \tilde{v}_r, \tilde{v}_\varphi, \tilde{p}) = e^{\lambda t + In\varphi}(\bar{v}_x, \bar{v}_r, \bar{v}_\varphi, \bar{p}) \quad (3.1)$$

vyloučíme čas t i souřadnici φ a dostaneme problém vlastních čísel

$$\begin{aligned} C_0 \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \lambda \bar{v}_x &= 0, \\ C_0 \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial x} - 2\Omega \bar{v}_\varphi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \lambda \bar{v}_r &= 0, \\ C_0 \frac{\partial \bar{v}_\varphi}{\partial x} + 2\Omega \bar{v}_r + \frac{nI}{\rho r} \bar{p} + \lambda \bar{v}_\varphi &= 0, \\ \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \bar{v}_r) + \frac{nI}{r} \bar{v}_\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Zde λ je vlastní číslo a \bar{v}_x , \bar{v}_r , \bar{v}_φ a \bar{p} jsou vlastní funkce proměnných x a r v obdélníkové oblasti

$$D = \{(x, r) \mid 0 < x < L, R_1 < r < R_2\}, \quad (3.3)$$

splňující nulové okrajové podmínky

$$\begin{aligned} \bar{v}_x = \bar{v}_r = \bar{v}_\varphi = 0 \quad \text{pro } x = 0, \quad \bar{p} = 0 \quad \text{pro } x = L, \\ \bar{p} = 0 \quad \text{pro } r = R_1, \quad \bar{v}_r = 0 \quad \text{pro } r = R_2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Člen $e^{\lambda t + In\varphi}$ použitý v transformaci v (3.1) tedy převádí nestacionární úlohu v trojdimenzionální oblasti Q na problém vlastních čísel ve dvoudimenzionální oblasti D . Rotačně symetrické úloze odpovídá případ $n = 0$.

Stabilita vyjádřená podmínkou (2.4) nastane, právě když všechna vlastní čísla úlohy (3.2) - (3.4) mají zápornou reálnou složku.

4. Aproximace vlastních funkcí

Oblast D rozdělíme na $n_x \times n_r$ shodných obdélníkových prvků D^{ij} , $i = 1, 2, \dots, n_x$, $j = 1, 2, \dots, n_r$, které mají délku $h_x = L/n_x$ ve směru osy x a $h_r = (R_2 - R_1)/n_r$ ve směru osy r . Prvek D^{ij} je obrazem referenčního prvku $\hat{D} = [-1, 1]^2$ v zobrazení

$$x^{ij}(\xi) = [i - 1 + \frac{1}{2}(\xi + 1)] h_x, \quad r^{ij}(\eta) = R_1 + [j - 1 + \frac{1}{2}(\eta + 1)] h_r, \quad [\xi, \eta] \in \hat{D}. \quad (4.1)$$

Nechť

$$-1 = \zeta_0 < \zeta_1 < \dots < \zeta_{N-1} < \zeta_N = 1 \quad (4.2)$$

jsou uzly Gaussovy-Lobattovy-Legendrovy kvadraturní formule (stručně GLL formule) řádu $2N - 1$, viz [1], a necht'

$$x_k^{ij} = x^{ij}(\zeta_k), \quad r_\ell^{ij} = r^{ij}(\zeta_\ell), \quad k, \ell = 0, 1, \dots, N, \quad (4.3)$$

jsou jejich obrazy v zobrazení (4.1).

Na prvku D^{ij} aproximujeme každou vlastní funkci \bar{v}_x , \bar{v}_r , \bar{v}_φ a \bar{p} stejným způsobem. Aproximaci kterékoliv z nich hledáme ve tvaru Lagrangeova interpolačního polynomu stupně N v každé z proměnných x , r na síti uzlů $[x_k^{ij}, r_\ell^{ij}]_{k,\ell=0}^N$, tj. ve tvaru

$$\bar{w}_\vartheta^{ij}(x, r) = \sum_{k,\ell=0}^N \bar{w}_{k\ell}^{ij} \psi_{k\ell}^{ij}(x, r), \quad \psi_{k\ell}^{ij}(x, r) = \alpha_k^{ij}(x) \beta_\ell^{ij}(r), \quad (4.4)$$

kde

$$\alpha_k^{ij}(x) = \prod_{\substack{s=0 \\ s \neq k}}^N \frac{x - x_s^{ij}}{x_k^{ij} - x_s^{ij}}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (4.5)$$

jsou Lagrangeovy fundamentální polynomy na síti uzlů $\{x_s^{ij}\}_{s=0}^N$ a podobně

$$\beta_\ell^{ij}(r) = \prod_{\substack{s=0 \\ s \neq \ell}}^N \frac{r - r_s^{ij}}{r_\ell^{ij} - r_s^{ij}}, \quad \ell = 0, 1, \dots, N, \quad (4.6)$$

jsou Lagrangeovy fundamentální polynomy na síti uzlů $\{r_s^{ij}\}_{s=0}^N$. Dolní index ϑ přitom vyjadřuje to, že funkce \bar{w}_ϑ^{ij} je aproximací funkce \bar{w} na prvku D^{ij} . Samotným symbolem ϑ pak budeme rozumět dvojici diskretizačních parametrů $\vartheta = (h, N)$, kde $h = \max(h_x, h_r)$ reprezentuje jemnost dělení a N je stupeň polynomické aproximace.

Funkcí \bar{w}_ϑ rozumíme funkci definovanou na (uzavřeném) obdélníku \bar{D} takovou, že její restrikce na prvek D^{ij} je rovna funkci \bar{w}_ϑ^{ij} . Protože mezi uzly $\{\zeta_s\}_{s=0}^N$ GLL formulí patří body ± 1 , ze vztahů (4.3) - (4.6) plyne, že funkce \bar{w}_ϑ je v \bar{D} spojitá.

Okrajové podmínky splníme tak, že položíme $\bar{w}_{k\ell}^{ij} = 0$ v těch uzlech $[x_k^{ij}, r_\ell^{ij}]$, v nichž je funkce \bar{w} rovna nule.

Konvergence $\bar{w}_\vartheta \rightarrow \bar{w}$ pro $h \rightarrow 0$ (N pevné) je typická pro klasickou (tzv. h -verzi) metody konečných prvků, pro dostatečně hladnou funkci \bar{w} je rychlost konvergence algebraická řádu $O(h^N)$, viz např. [3]. Z teorie metody spektrálních prvků je známo, že když má funkce \bar{w} spojitě derivace všech řádů, pak pro $N \rightarrow \infty$ (h pevné) je rychlost konvergence $\bar{w}_\vartheta \rightarrow \bar{w}$ rychlejší než algebraická, řádu $O(N^{-m})$ pro libovolné $m > 0$, viz např. [2].

Hledané aproximace vlastních funkcí označíme $\bar{v}_{x,\vartheta}$, $\bar{v}_{r,\vartheta}$, $\bar{v}_{\varphi,\vartheta}$ a \bar{p}_ϑ . Jsou to funkce po částech polynomické (na každém prvku D^{ij} v každé z proměnných x , r polynomy stupně N), globálně spojitě (tj. spojitě v uzavřené oblasti \bar{D}), splňující okrajové podmínky (3.4).

5. Kolokační metoda

Do rovnic (3.2) dosadíme $\bar{v}_{x,\vartheta}$, $\bar{v}_{r,\vartheta}$, $\bar{v}_{\varphi,\vartheta}$ a \bar{p}_ϑ místo \bar{v}_x , \bar{v}_r , \bar{v}_φ a \bar{p} a na každém prvku dosadíme za (x, r) všechny *GLL* uzly. Tak dostaneme soustavu $4n_x n_r (N + 1)^2$ rovnic

$$\mathbf{A}^* \mathbf{u}^* = \lambda \mathbf{B}^* \mathbf{u}^*, \quad (5.1)$$

kde

$$\mathbf{A}^* = - \begin{pmatrix} C_0 \mathbf{D}_x & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \frac{1}{\varrho} \mathbf{D}_x \\ \mathbf{O} & C_0 \mathbf{D}_x & -2\Omega \mathbf{I} & \frac{1}{\varrho} \mathbf{D}_r \\ \mathbf{O} & 2\Omega \mathbf{I} & C_0 \mathbf{D}_x & \frac{nI}{\varrho} \mathbf{R} \\ \mathbf{D}_x & \mathbf{D}_r + \mathbf{R} & nI \mathbf{R} & \mathbf{O} \end{pmatrix}, \mathbf{B}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}, \mathbf{u}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_x \\ \mathbf{v}_r \\ \mathbf{v}_\varphi \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Zde matice \mathbf{D}_x resp. \mathbf{D}_r odpovídá derivaci bázových funkcí $\psi_{k\ell}^{ij}$ podle x resp. r (podrobně viz např. [4]), \mathbf{I} je jednotková matice a \mathbf{O} nulová matice. \mathbf{R} je diagonální matice odpovídající členu $1/r$ ve třetí a čtvrté rovnici soustavy (3.2) (\mathbf{R} má v řádku příslušném kolokačnímu uzlu $[x_k^{ij}, r_\ell^{ij}]$ na diagonále číslo $[r_\ell^{ij}]^{-1}$).

Jestliže je některý uzel společný pro více prvků (dva nebo čtyři), pak příslušné řádky a sloupce matic \mathbf{A} , \mathbf{B} sečteme a vektor parametrů \mathbf{u}^* odpovídajícím způsobem zredukujeme. Některé složky redukovaného vektoru parametrů jsou rovny nule, neboť jsou v nich předepsány nulové okrajové podmínky. Tyto složky vynecháme a současně vynecháme také odpovídající sloupce a řádky matic \mathbf{A}^* , \mathbf{B}^* . Dostaneme tak problém vlastních čísel

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \lambda \mathbf{B} \mathbf{u}, \quad (5.3)$$

který vyřešíme.

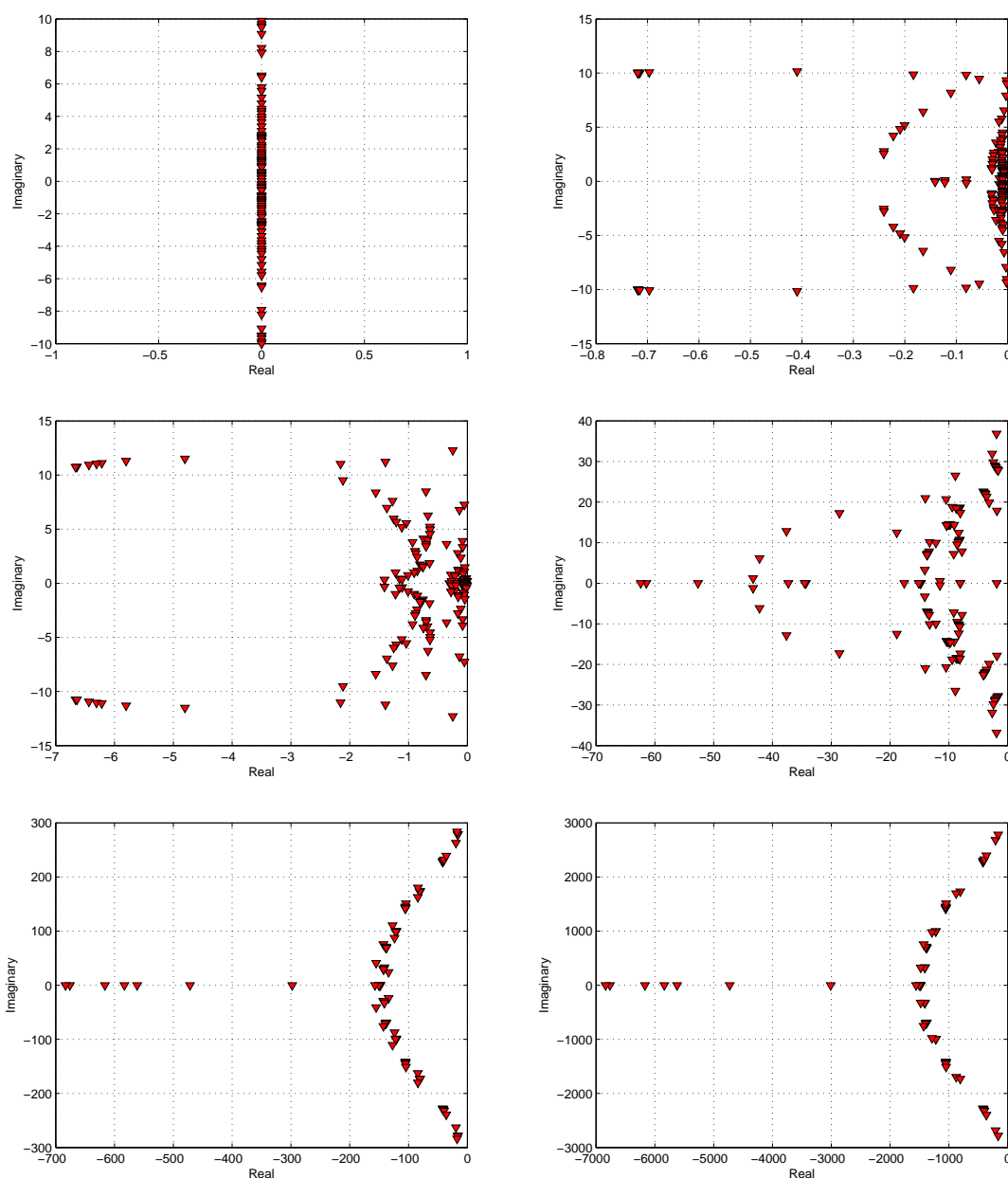
Algoritmus je implementován v MATLABu. Matice \mathbf{A} a \mathbf{B} se sestavují z tzv. elementárních matic postupem dobře známým z metody konečných prvků, viz např. [5]. K výpočtu vlastních čísel jsme použili funkci `eig` (počítá všechna vlastní čísla) a `eigs` (počítá několik uživatelem specifikovaných vlastních čísel).

6. Numerické výsledky

Výpočty jsme prováděli pro data odpovídající konkrétnímu technickému zadání. Zvolili jsme $R_1 = 0,015$, $R_2 = 0,15$, $L = 0,5$, $\varrho = 1000$ a experimentovali jsme s hodnotami pro C_0 a Ω . Pokud jde o parametr n , většinu výpočtů jsme provedli pro rotačně symetrickou úlohu, tj. pro $n = 0$. Několik pokusů jsme však provedli také pro $n = 1, 2, 3$. Ve všech testovaných případech jsme dostali vlastní čísla se zápornou reálnou složkou.

Rozložení vlastních čísel pro $n = 0$, $\Omega = 5$ a několik hodnot C_0 znázorňuje obrázek 1. Pro $C_0 = 0$ jsou vlastní čísla ryze imaginární, viz dodatek, pro $C_0 > 0$ mají vlastní čísla zápornou reálnou složku, přičemž s růstem C_0 absolutní hodnota největších vlastních čísel roste.

Případ pro $n = 0$, $C_0 = 5$ a několik hodnot Ω je uveden na obrázku 2. S růstem Ω se vlastní čísla shlukují okolo imaginární osy.



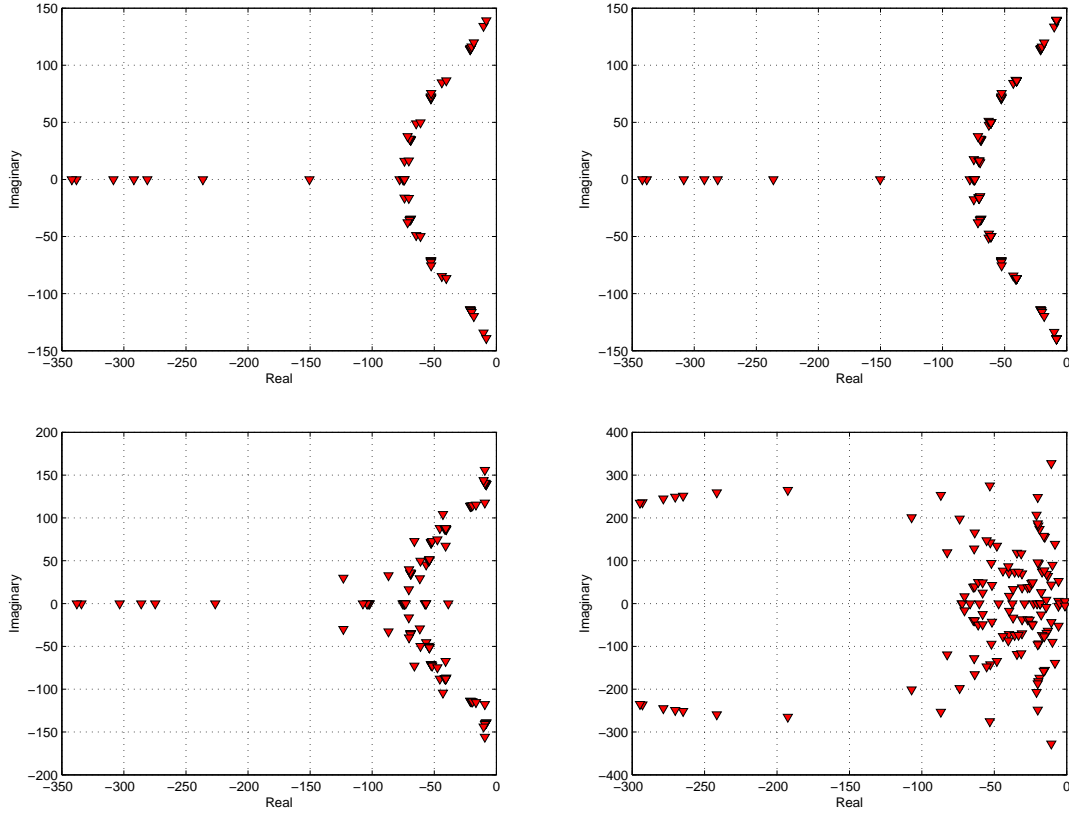
Obrázek 1: Vlastní čísla, $n = 0$, $\Omega = 5$, $N = 8$, $n_x = n_r = 1$, vlevo nahoře $C_0 = 0$, vpravo nahoře $C_0 = 0,01$, vlevo uprostřed $C_0 = 0,1$, vpravo uprostřed $C_0 = 1$, vlevo dole $C_0 = 10$, vpravo dole $C_0 = 100$.

Výsledky uvedené na obrázcích 1 a 2 jsme získali výpočty provedenými na jediném prvku s polynomem stupně 8. Kvalitativně stejné výsledky obdržíme, když použijeme několik prvků, jak je patrné z obrázku 3.

Na obrázku 4 demonstrujeme vliv n : pro $n > 0$ je matice \mathbf{A} komplexní a proto komplexní vlastní čísla už nevystupují v komplexně sdružených dvojicích.

Analýzou získaných výsledků jsme dospěli k závěru, že zkoumané stacionární proudění

je pro realistické hodnoty parametrů C_0 a Ω stabilní.



Obrázek 2: Vlastní čísla, $n = 0$, $C_0 = 5$, $N = 8$, $n_x = n_r = 1$, vlevo nahoře $\Omega_0 = 0$, vpravo nahoře $\Omega_0 = 1$, vlevo dole $\Omega = 10$, vpravo dole $\Omega = 100$.

7. Dodatek

V případě $n = 0$ a $C_0 = 0$ lze rovnice (3.2) zapsat ve tvaru

$$\lambda \bar{v}_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}, \quad (7.1_1)$$

$$\lambda \bar{v}_r - 2\Omega \bar{v}_\varphi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r}, \quad (7.1_2)$$

$$2\Omega \bar{v}_r + \lambda \bar{v}_\varphi = 0, \quad (7.1_3)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{v}_r) = 0. \quad (7.1_4)$$

Z rovnic (7.1₁), (7.1₂) a (7.1₃) vyjádříme

$$\bar{v}_x = -\frac{1}{\lambda \varrho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \bar{v}_r = -\frac{\lambda}{\varrho(\lambda^2 + 4\Omega^2)} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \bar{v}_\varphi = \frac{2\Omega}{\varrho(\lambda^2 + 4\Omega^2)} \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (7.2)$$

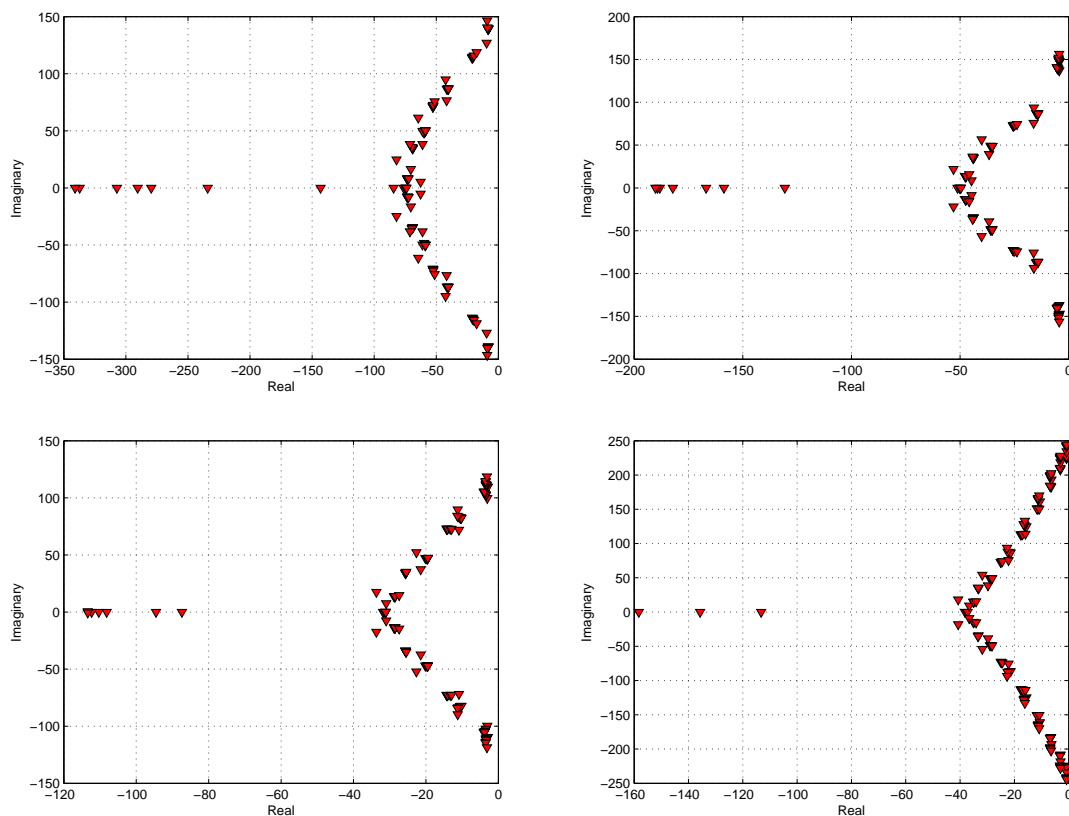
Dosazením do (7.1₄) po úpravě dostaneme

$$-\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \right) = s \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x^2}, \quad \text{kde } s = \left(\frac{2\Omega}{\lambda} \right)^2. \quad (7.3)$$

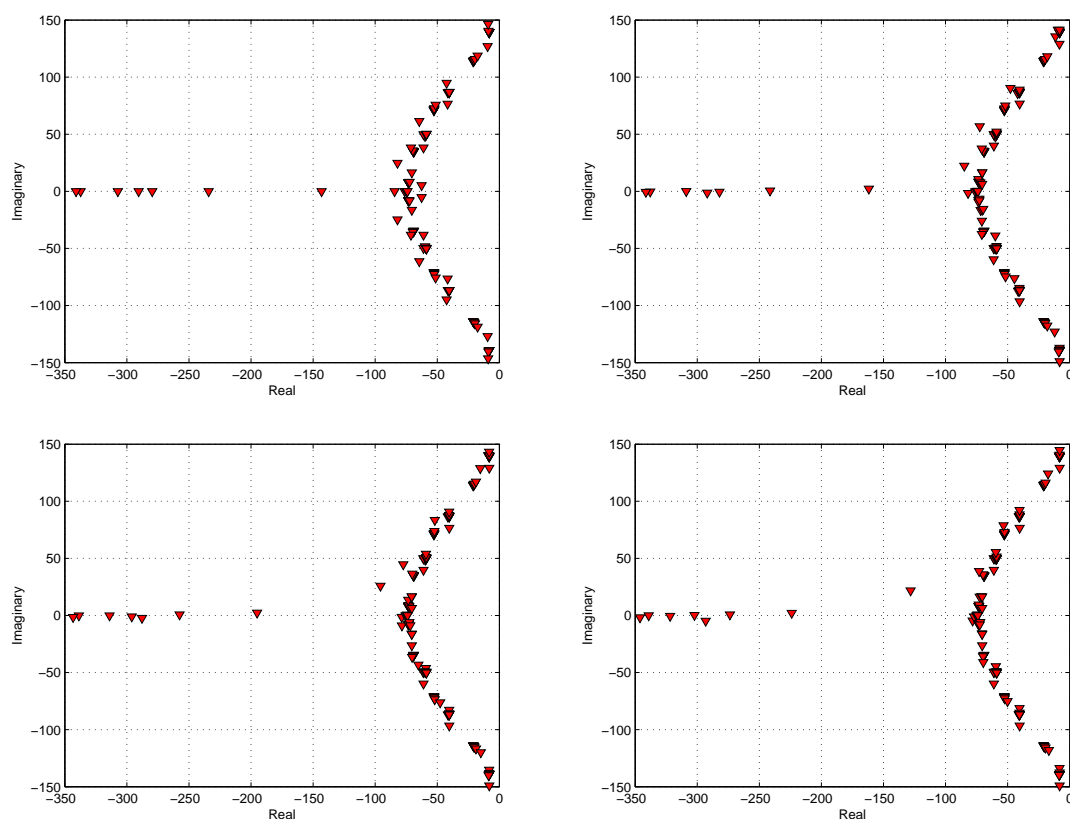
Z okrajových podmínek (3.4) a ze vztahů (7.2) plyne

$$\bar{p} = 0 \quad \text{pro } x = L \text{ a } r = R_1, \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0 \quad \text{pro } x = 0, \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} = 0 \quad \text{pro } r = R_2. \quad (7.4)$$

Úloha (7.3) - (7.4) má zřejmě reálná nekladná vlastní čísla $s \leq 0$ a proto λ musí být ryze komplexní.



Obrázek 3: Vlastní čísla, $n = 0$, $C_0 = \Omega = 5$, vlevo nahoře $N = 8$, $n_x = n_r = 1$, vpravo nahoře $N = 4$, $n_x = n_r = 2$, vlevo dole $N = 2$, $n_x = n_r = 4$, vpravo dole $N = 2$, $n_x = 8$, $n_r = 2$.



Obrázek 4: Vlastní čísla, $C_0 = \Omega = 5$, $N = 8$, $n_x = n_r = 1$, vlevo nahoře $n = 0$, vpravo nahoře $n = 1$, vlevo dole $n = 2$, vpravo dole $n = 3$.

Literatura

- [1] M. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, T. A. Zang: *Spectral Methods. Fundamentals in Single Domains*, Springer, Berlin, 2006.
- [2] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, T. A. Zang: *Spectral Methods. Evolution to Complex Geometries and Applications to Fluid Dynamics*, Springer Verlag, Berlin, 2007.
- [3] P. G. Ciarlet: *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, Nort-Holland, Amsterdam, 1978.
- [4] M. O. Deville, P. F. Fisher, E. H. Mund: *High-Order Methods for Incompressible Fluid Flow*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [5] G. E. Karniadakis, S. J. Sherwin: *Spectral/hp Element Methods for Computational Fluid Dynamics*, Oxford University Press, Oxford, 2005.
- [6] M. P. Païdoussis: *Fluid–Structures interactions*, Elsevier Academic Press, San Diego, 2004.