Použitie Laplaceovej transformácie pri identifikácii prechodových funkcií v technických výpočtoch

Jana Boržíková
Fakulta výrobných technológií, Technická univerzita Košice so sídlom v Prešove
e-mail: borzikova.jana@fvt.sk

Abstract

V technickej praxi sa stretávame s úlohou vytvoriť model a popísať technický proces pomocou diferenciálnej rovnice alebo sústavy diferenciálnych rovníc. Nameraním diskrétnych hodnôt prechodovej funkcie môžeme získať riešenie tejto diferenciálnej rovnice. Nižšie popísaný prístup ukazuje ako využiť poznatky z Laplaceovej transformácie na určenie prenosu (t.j. ľavej strany diferenciálnej rovnice) podľa riešenia rovnice.

1. Úvod

Z matematického hľadiska budeme hovoriť o diferenciálnej rovnici druhého rádu s konštantnými koeficientmi a jej riešení pomocou Laplaceovej transformácie. Ako príklad bude slúžiť úloha, riešená vrámci projektu na našej katedre, nájsť model pneumatického umelého svalu na základe nameraných hodnôt prechodovej funkcie. Na úvod ešte uvediem niektoré pojmy z teórie riadenia. Nech skúmaný pneumatický umelý sval je systém so zatiaľ neznámymi prvkami a väzbami medzi nimi. Hľadáme matematicky model umelého svalu, ktorý je všeobecne charakterizovaný:

– vektorom vstupov $\boldsymbol{u}(t)$
– vektorom stavových premenných (vnútorné premenné systému) $\boldsymbol{x}(t)$
– vektorom výstupov $\boldsymbol{y}(t)$.

Pri aproximácii prechodových funkcií je dôležité na základe zhodnotenia tvaru prechodovej funkcie rozhodnúť o type prenosu, ktorým budeme systém aproximovať. Ak vykazuje kmity je zrejmé, že aspoň dva korene charakteristickej rovnice diferenciálnej rovnice sú komplexne združené.

2. Využitie Laplaceovej transformácie pri riešení technických úloh

Nech je náš systém popísaný diferenciálnou rovnicou 2. rádu s konštantnými koeficientmi:

$$T_0 y'' + 2T_0\xi\, y' + y = u(t) \tag{1}$$

Vychádzame z nameraných diskrétnych hodnôt kontrakcie. Nech je hľadaná funkcia y funkciou kontrakcie na čase $k = f(t)$. Začiatočné podmienky sú $y(0) = 0, y'(0) = 0$. Použitím Laplaceovej transformácie (Vítečková, Saloky, Takáč, 2004) dostávame obraz diferenciálnej rovnice:

$$T_0\left[s^2 y(s) - sy(0) - y'(0)\right] + 2T_0\xi\left[sy(s) - y(0)\right] + y(s) = u(s) \tag{2}$$

Po dosadení a úprave:

$$y(s).\left[T_0 s^2 + 2T_0\xi\, s + 1\right] = u(s) \tag{3}$$

$$y(s) = \frac{u(s)}{\left[T_0 s^2 + 2T_0\xi\, s + 1\right]} \tag{4}$$

Prenos systému je potom rovný

$$G(s)=\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{1}{T_0 s^2+2\xi T_0 s+1} \tag{5}$$

Nech vstupom nášho systému je skoková funkcia $u(t) = K$, potom obraz v Laplaceovej transformácii je $u(s)=\frac{K}{s}$. Takže ďalej

$$y(s)=\frac{K}{s\left[T_0 s^2+2T_0\xi\, s+1\right]}, \tag{6}$$

pre normovanú premennú $u(t)=1$

$$y(s)=\frac{1}{s\left[T_0 s^2+2T_0\xi\, s+1\right]}. \tag{7}$$

Aproximovaná charakteristika bude teda určená prenosom, ktorý obsahuje proporcionálny člen zo zotrvačnosťou 2. rádu a súčiniteľom pomerného tlmenia $0 < \xi < 1$. (Föllinger, 1990)

Z matematického hľadiska povieme, že výraz v menovateli zlomku nemá reálne korene.
Po rozklade na parciálne zlomky dostávame:

$$y(s)=\frac{1}{s\left[T_0 s^2+2T_0\xi\, s+1\right]}=\frac{1}{s}-\frac{T_0^2 s+2\xi T_0}{T_0 s^2+2T_0\xi\, s+1}=\frac{1}{s}-\frac{T_0^2 s+2\xi T_0}{T_0^{\,2}\left[\left(s+\frac{\xi}{T_0}\right)^2+\frac{1-\xi^2}{T_0^{\,2}}\right]}$$

$$y(s)=\frac{1}{s}-\left(\frac{s+\frac{\xi}{T_0}}{\left[\left(s+\frac{\xi}{T_0}\right)^2+\frac{1-\xi^2}{T_0^{\,2}}\right]}+\frac{\frac{2\xi}{T_0}-\frac{\xi}{T_0}}{\left[\left(s+\frac{\xi}{T_0}\right)^2+\frac{1-\xi^2}{T_0^{\,2}}\right]}\right) \tag{8}$$

Čo po spätnej Laplaceovej transformácii je

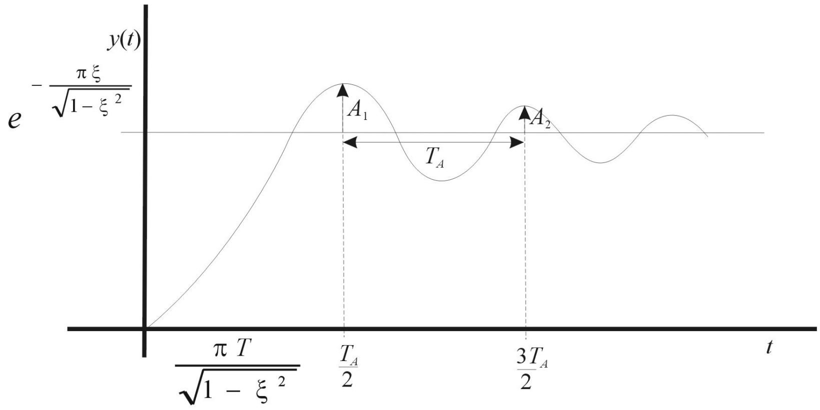
$$y(t)=1-e^{-\frac{\xi}{T}.t}.\left(\cos\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}.\sin\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t\right)$$

$$y(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\frac{\xi}{T}.t}.\sin\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}.t+arctg\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) \tag{9}$$

Z nameranej prechodovej funkcie získame nasledujúce hodnoty: označme periódu medzi dvoma extrémami T_A, prvý extrém A_1, druhý A_2. Situácia je znázornená na obrázku 1.

Výpočet parametrov ξ, T potom vychádza z nasledujúcich viet (Noskievič, 1999):
1. Nech ω je frekvencia výstupného signálu potom perióda (vzdialenosť dvoch extrémov) $T_A=\frac{2\pi}{\omega}$ a súčasne podľa (9) je $\omega=\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$, potom pre T platí vzťah:

$$T=\frac{T_A\sqrt{1-\xi^2}}{2\pi} \tag{10}$$



Obrázok 1. Parametre prechodovej funkcie

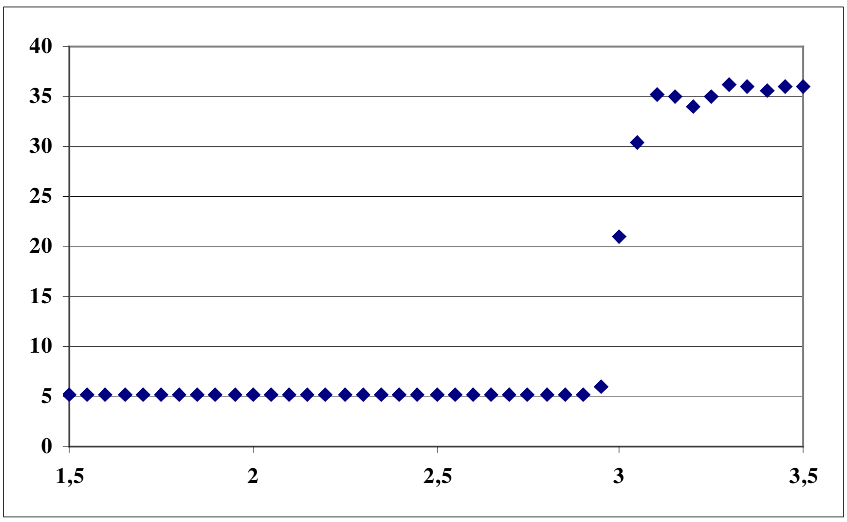
2. Nech A_1 je amplitúda v $\frac{T_A}{2}$ a platí $A_1 = \left(e^{-\frac{\xi}{T}t}\right)_{\frac{T_A}{2}}$, A_2 je amplitúda v $\frac{3.T_A}{2}$ a platí $A_2 = \left(e^{-\frac{\xi}{T}t}\right)_{\frac{3.T_A}{2}}$, potom pre ξ platí vzťah

$$\xi = \pm \frac{\ln^2\left(\frac{A_1}{A_2}\right)}{\sqrt{4\pi^2 + \ln^2 \frac{A_1}{A_2}}} \tag{11A}$$

Podľa niektorej literatúry sa uvádza aj zjednodušený výpočet podľa prvej amplitúdy

$$\xi = \pm \frac{\ln^2(A_1)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 A_1}} \tag{11B}$$

3 Výsledky experimentálneho riešenia uvedeného problému



Obrázok 2. Namerané hodnoty prechodovej charakteristiky

Funkčnosť a statické vlastnosti antagonistického systému obsahujúceho umelý sval je popísaná v (Balara, Boržíková, 2005) Graficky zaznamenané hodnoty (Obrázok 2) aproximujeme takou funkciou, ktorá čo najvhodnejšie vystihuje priebeh nameranej prechodovej charakteristiky.
Hodnoty boli zaznamenané pre umelý sval pod záťažou (45 N ≅ 4,5 kg) a pri konštantnom tlaku napĺňania (p = 3,5 bar). Os x vyjadruje hodnoty času v sekundách z intervalu $\langle 1{,}5;\ 3{,}5\rangle$. Na os y sú nanesené hodnoty kontrakcie zmrštenia svalu v percentách. Zo skúmaného javu je zrejmé, že interval $t\in \langle 1{,}5;\ 2{,}9\rangle$ je pásmo necitlivosti, t. j. umelý sval nereaguje na napúšťaný vzduch. Na intervale $t\in\langle 2{,}9;\ 3{,}5\rangle$ je pásmo napĺňania, t. j. umelý sval reaguje na napĺňania vzduchom. Hodnota kontrakcie sa nakoniec ustáli na hodnote $k_0 = 36$.
Pre zjednodušenie boli hodnoty y normované, aby bola ustálená hodnota k0 = 1, t. j. bola zavedená substitúcia:

$$v_i = \frac{y_i - 5{,}2}{30{,}8} \text{ pre všetky } i$$

Hodnoty znormujeme a začiatok kontrakcie posunieme do nuly. Nech z merania sú zistené hodnoty: $A_1 = 0{,}00974$ a $A_2 = 0{,}006494$, $T_A = 0{,}2$.
Potom podľa vzťahu (11B) bude ξ = 0,827577, podľa (10) T = 0,035755. A po dosadení do (9) bude mať prechodová funkcia tvar:

$$v(t) = 1 - 1{,}781413e^{-23{,}14577.t}.\sin(15{,}69878.t + 0{,}596019)$$

$$v(t) = 1 - e^{-23{,}14577.t+0{,}577407}.\sin(15{,}69878.t + 0{,}596019) \quad (12)$$

Keďže systém vykazuje dopravne oneskorenie, tak podľa vety o posunutí vzoru bude mať prenos podľa (8) predpis:

$$G(s) = \frac{1}{0{,}00128s^2 + 0{,}05918s + 1}.e^{-2{,}9t}$$

Záver

V prvom rade je potrebné upozorniť, že pri takomto riešení dochádza k výraznému zjednodušeniu, keď predpokladáme, že stavové premenné $\boldsymbol{x}(t)$ sú invariantné na čase. *T.* j. dynamický systém je charakterizovaný diferenciálnou rovnicou „iba“ s konštantnými koeficientmi. Získané riešenia by bolo možné získať zostavením diferenciálnej rovnice vychádzajúcej z fyzikálnych vlastností systému a výsledky porovnať.
Takéto aplikácie matematiky sú riešené na vysokých školách technického zamerania, majú širokú aplikovateľnosť v kybernetike, teórii riadenia a praxi a predpokladajú dobrú pripravenosť študentov z matematiky.

Literatúra

[1] Balara, M., Boržíková, J. The mathematical description of characteristics of pneumatic artificial muscles. In: *DAAAM International Scientific Book.* p. 025-032. ISSN 1726-9687.

[2] Follinger, O. *Regelungstechnik, Heidelberg*, Huthig Buch Verlag Gmbh, 1990, ISBN 3-7785-1808-9

[3] Noskievič, P. *Modelování a identifikace systému*, Praha, 1999, ISBN 80-7225-030-2.

[4] Vítečková, M., Saloky, T., Takáč, R. *Laplaceova a Z-transformácia v automatizácii*, SjF TUKE, Košice, 2004. ISBN 80-8073-221-3