

# SOFTWAREVÁ PODPORA VÝUKY PŘEDMĚTU „DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE A JEJICH POUŽITÍ V ELEKTROTECHNICE“.

Jaromír Baštinec,

Ústav matematiky, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, VUT Brno,  
Technická 8, 616 00 Brno, Česká republika  
e-mail: [bastinec@feec.vutbr.cz](mailto:bastinec@feec.vutbr.cz)

Irena Hlavičková

Ústav matematiky, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, VUT Brno,  
Technická 8, 616 00 Brno, Česká republika  
e-mail: [hlavicka@feec.vutbr.cz](mailto:hlavicka@feec.vutbr.cz)

Zdeněk Šmarda

Ústav matematiky, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, VUT Brno,  
Technická 8, 616 00 Brno, Česká republika  
e-mail: [smarda@feec.vutbr.cz](mailto:smarda@feec.vutbr.cz)

## Abstrakt

Do navazujícího magisterského studia na Fakultě elektrotechniky a komunikačních technologií VUT v Brně byly zařazeny i čtyři matematické předměty. Při jejich výuce se přednášející i cvičící musí vyrovnávat s problémy, které vznikají u studentů přerušením jejich matematické přípravy a s tím spojenou určitou ztrátou matematických schopností a dovedností. Jsou uvedeny zkušenosti s výukou předmětu „Diferenciální rovnice a jejich použití v elektrotechnice“ a jsou popsány postupné inovace předmětu.

**Key words:** Diferenciální rovnice, magisterské studium, inovace, aplikace, elektrotechnika.

## 1 Úvod

Po přechodu na dvojstupňový systém vysokoškolského studia (od roku 2002) na Fakultě elektrotechniky a komunikačních technologií (FEKT) VUT v Brně promovali první sérioví bakaláři v roce 2005. Na podzim téhož roku bylo zahájeno navazující magisterské studium.

Už v průběhu prvních ročníků bakalářského studia bylo nutné provádět změny v osnovách a průběžně upravovat studijní plány. Podrobnosti viz [1], [3], [7].

Souběžně s úpravami bakalářského studia probíhala i příprava navazujícího magisterského studia. Protože se od inženýrů (tj. od absolventů magisterského studia) očekává i hlubší vhled do zvoleného oboru, je nutná i jejich důkladnější teoretická příprava, neboť musí mezi jiným zvládnout i teoretické základy technických oborů. K úspěšnému splnění těchto cílů jsou nezbytné i dokonalejší matematické znalosti. K tomuto účelu byly do navazujícího magisterského studia zařazeny i čtyři volitelné matematické předměty:

- Diferenciální rovnice a jejich použití v elektrotechnice.
- Pravděpodobnost, statistika a operační výzkum.

- Maticový a tenzorový počet.
- Moderní numerické metody.

První dva předměty jsou zařazeny do zimního semestru a další dva do letního. Od studentů se očekává, že zvolené předměty absolvují během prvního roku navazujícího magisterského studia. Pokud se jim nepodaří předměty absolvovat během prvního ročníku, je možné si je zapsat i ve druhém ročníku.

## 2 Diferenciální rovnice a jejich použití v elektrotechnice

Předmět Diferenciální rovnice a jejich použití v elektrotechnice (fakultní zkratka MDRE) byl vytvořen tak, aby obsahoval vhodný matematický aparát pro popis elektrotechnických jevů v navazujícím magisterském studiu na FEKT VUT a pro jejich řešení v rámci různých aplikací.

Při přípravě předmětu MDRE jsme vycházeli z tehdy platných osnov pro bakalářské studium (práce na přípravě byly zahájeny už během roku 2004) a z požadavků finálních ústavů na konečný profil absolventa. Tomu jsme přizpůsobili přípravu obsahu a stylu výuky.

Z druhé strany jsme v té době nevěděli, jaká bude úroveň budoucích posluchačů a neměli jsme žádnou možnost srovnání. Jen jsme věděli, že studenti budou mít přetržku v matematickém vzdělávání, která může být až v délce tři semestrů, pokud si nezapíše volitelný předmět *Vybrané partie z matematiky*. Tušili jsme, že dojde ke změně jejich matematických a početních návyků, ale neměli jsme žádnou představu o tom, jaká bude rychlost zapomínání a s čím můžeme počítat jako se společným vědomostním základem.

Od školního roku 2005/2006, kdy byl předmět MDRE poprvé přednášen v zimním semestru prvního ročníku navazujícího magisterského studia, je jeho rozsah 3 hodiny přednášek týdně a 1 hodina počítačových cvičení týdně při 13 týdenním výukovém semestru. Předmět je zakončen zkouškou. Studenti mohou získat až 30 bodů ze cvičení a až 70 bodů při závěrečné zkoušce. Přičemž zkoušky se na naší fakultě konají výhradně písemnou formou.

Přednášky neobsahovaly některé základní poznatky o diferenciálních rovnicích a jejich systémech, které byly předneseny v jednotlivých předmětech bakalářského studia. Jedná se například o rovnice se separovanými proměnnými, homogenní rovnice, lineární rovnice, Cauchyovu úlohu, existenci řešení apod.

Náš původní předpoklad byl, že studenti si budou dané postupy pamatovat a budou ovládat jejich praktické používání, popřípadě že po krátkém připomenutí je bude možné pokládat za známé. Ve skutečnosti bylo nutné je důkladně připomenout a zopakovat. Řada studentů ale působila dojmem, že slyší daný materiál poprvé.

Původní náplň přednášek a počítačových cvičení předmětu MDRE je uveden například v [4].

Jako pro všechny předměty na fakultě byl i pro předmět MDRE vytvořen elektronický učební text [8]. Je přístupný na fakultní počítačové síti, k níž má přístupové heslo každý student i zaměstnanec FEKT. Do učebního textu bylo hned od počátku zapracováno i větší množství příkladů (řešených i neřešených, ale s uvedenými výsledky), aby mohl sloužit nejen pro výuku, ale také pro samostatnou domácí přípravu studentů.

## 3 Inovace

Při přípravě bakalářského studia byl obsah teoretických předmětů, a obzvláště matematiky, pouze *nahuštěn* do mnohem menšího počtu vyučovacích hodin.<sup>1</sup> V praxi se potom ukázalo, že

<sup>1</sup>Během celého bakalářského studia mají studenti pouze 195 hodin výuky povinných matematických předmětů. Pro srovnání - před započítáním reformy bylo jen v prvním semestru 225 hodin matematiky.

látku je sice možné odpřednášet, ale studenti nejsou schopni zvládnout požadovaný objem učiva, viz [10].

Proto bylo nutno přistoupit k úpravám osnov. Byly provedeny určité změny a některé partie matematiky byly přesunuty z povinných předmětů do výše zmíněného volitelného předmětu a jiné byly úplně vynechány.

Tím došlo k tomu, že některé tématické celky, které byly součástí výuky v 1. a 2. ročníku dřívějšího pětiletého inženýrského studia a které jsou nutné k pochopení matematických předmětů i aplikací v navazujícím magisterském studiu, nebyly vůbec součástí osnov.

Na základě rozboru výsledků a zkušeností z prvních dvou ročníků navazujícího magisterského studia bylo navrženo provést inovaci předmětu MDRE. S ohledem na změněnou strukturu matematických předmětů v bakalářském a magisterském studiu byl návrh vedením fakulty přijat.

K tomuto závěru vedlo zjištění, že v celém kurzu matematiky (bráno souhrnně bakalářské a magisterské studium) nejsou obsaženy některé oblasti, týkající se obyčejných diferenciálních rovnic, které jsou nezbytným matematickým aparátem mnoha finálních specializací fakulty. Jde hlavně o rozšíření metod řešení systémů diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty, výklad stability obyčejných diferenciálních rovnic, limitních cyklů a periodických řešení. Část dřívější látky bude vynechána, dříve probrané partie učiva se budou pokládat za známé a nebudou se znovu opakovat, i když od jejich výuky už uběhly tři semestry (týká se částí učiva z bakalářského studia). Inovace se bude týkat zhruba poloviny látky. Dalším výstupem je zjištění, že bude nutné provádět inovace předmětů častěji v pravidelných intervalech, jejichž délka bude záviset na změnách ve znalostech studentů a na požadavcích finálních ústavů.

Po provedených úpravách je osnova MDRE ve tvaru:

Přednášky:

#### **I. Diferenciální rovnice prvního řádu.**

Základní pojmy. Existence řešení. Postupné aproximace. Přehled nejdůležitějších typů rovnic prvního řádu, které lze řešit analyticky. Rovnice vyšších řádů. Řešení lineárních rovnic druhého řádu pomocí mocninných řad. Besselova rovnice a Besselovy funkce.

#### **II. Existence a jednoznačnost řešení systémů diferenciálních rovnic prvního řádu.**

Lineární systémy obyčejných diferenciálních rovnic. Obecné vlastnosti řešení a jeho struktura. Přenosová matice. Řešení počáteční úlohy užitím přenosové matice. Lineární systémy s konstantními koeficienty (homogenní systémy - eliminační metoda, metoda charakteristických čísel, využití exponenciály matice, Putzerův algoritmus řešení, nehomogenní systémy - metoda neurčitých koeficientů, metoda variace konstant). Popis elektrických obvodů lineárními systémy.

#### **III. Stabilita řešení systémů diferenciálních rovnic.**

Autonomní systémy. Ljapunovova přímá metoda pro autonomní systémy. Ljapunovovská funkce. Ljapunovova přímá metoda pro neautonomní systémy. Stabilita lineárních systémů. Hurwitzovo kritérium. Michajlovovo kritérium. Stabilita podle lineární aproximace. Fázová analýza lineárního dvourozměrného autonomního systému s konstantními koeficienty a případy stability.

#### **IV. Limitní cykly a periodická řešení. Poincarého-Bendixsonova věta. Liénardova-Levinsonova-Smithova věta. Aplikace na nelineární rovnice popisující periodické režimy elektrotechnických procesů.**

#### **V. Parciální diferenciální rovnice prvního řádu.**

Počáteční úloha. Nejjednodušší typy rovnic. Charakteristický systém. Existence řešení. Obecné řešení. První integrály. Pfaffova rovnice.

## VI. Parciální diferenciální rovnice druhého řádu.

Klasifikace rovnic. Transformace proměnných. Vlnová rovnice, D'Alembertův vzorec. Rovnice vedení tepla, Dirichletova úloha. Laplaceova rovnice. Řešení Fourierovou metodou separace proměnných.

Témata pro počítačová cvičení:

1. Přesná řešení rovnic prvního řádu a vyšších řádů.
2. Směrová pole diferenciálních rovnic.
3. Přibližné řešení rovnic prvního řádu a vyšších řádů.
4. Popis elektrických obvodů diferenciálními rovnicemi.
5. Rovnice matematického kyvadla.
6. Van der Poolova rovnice.
7. Řešení ve tvaru nekonečných řad.
8. Besselova rovnice, Besselovy funkce.
9. Diskuse předností a slabín matematického software.
10. Analýza dvourozměrného lineárního dynamického systému.
11. Algoritmy řešení vícerozměrného lineárního systému s konstantními koeficienty.
12. Kriteria stability, softwarové rozhodování o stabilitě.
13. Parciální rovnice prvního řádu.
14. Softwarové řešení základních typů parciálních rovnic druhého řádu.

Protože cvičení se konají jen každý druhý týden, předpokládá se, že během jednoho cvičení budou probhána dvě až tři témata. Z toho hned vyplývá, že stěžejní jsou přednášky a samostatná příprava studentů.

V souladu s požadavky fakulty byl odpovídajícím způsobem inovován elektronický učební text. Bylo vytvořeno 13 částí učebního textu, které odpovídají třináctitýdennímu výukovému semestru, plus úvodní a závěrečná část. Jednotlivé části vznikly přepracováním původního textu, do kterého jsou vloženy vytvořené nové části, přitom podstatná část dřívější látky byla nově přeskupena a přepracována v souladu s nově stanovenými cíli.

Cvičením je v osnovách věnována pouze třetina doby vyčleněné pro přednášky. Plán přitom počítá pouze s počítačovými cvičeními. Numerická cvičení nebyla do plánu vůbec zahrnuta. Proto bylo nutné materiál koncipovat tak, aby byl co nejvíce využitelný i pro samostatnou domácí práci posluchačů. Tomuto záměru opět odpovídá i dostatečný počet příkladů, které jsou zařazeny do textu. Jedná se jednak o řešené ukázkové příklady, zahrnuté přímo do textu a ilustrující odvozené teoretické postupy, a jednak o neřešené příklady s uvedenými výsledky. Výsledný učební text je opět umístěn na fakultní síti. Viz [9]. Jeho případné zpřístupnění všem zájemcům, bez nutnosti mít přístupové heslo, je záležitostí vedení fakulty. Elektronická adresa učebních textů [8] a [9] je stejná. Ale na síti je vždy umístěna pouze poslední verze učebního textu. Případní zájemci o původní text se mohou obrátit přímo na autory.

## 4 Softwarová podpora výuky

O předmět MDRE je mezi studenty velký zájem. Studenti si už sami uvědomují, jak je důležitý kvalitní teoretický základ a podle toho i přistupují ke studiu. Je vidět velkou změnu oproti bakalářskému studiu v tom, že studenti jsou zodpovědnější a dospělejší. Svoji roli samozřejmě sehrává i to, že v průběhu bakalářského studia byla provedena selekce a nejslabší studenti buď sami zanechali studia a nebo jim bylo studium ukončeno z důvodů nesplnění studijních povinností.

Současně s tímto pozitivním jevem se u studentů stále více projevují důsledky uspěchaného bakalářského studia. Snažíme se proto zvýšit využívání vhodného matematického software přímo ve výuce. Zde jsme omezovali dostupností jednotlivých programů. Některé programy můžeme běžně používat na přednáškách a ve cvičeních, ale studenti s nimi nemohou pracovat doma, protože jde o licencované produkty. V prvním ročníku bakalářského studia se používá hlavně program MAPLE, přičemž studenti jej využívají hlavně jako lepší kalkulačku. V dalších ročnících se přechází na MATLAB, protože s ním pracují naše finální ústavy.

Balík programů MATHEMATICA máme sice na ústavu, ale vzhledem k jeho ceně s ním nemůžeme obecně pracovat ani ve výuce, protože jde o produkt, který je vždy vázán na konkrétní počítač. Nákup multilicence byl vedením školy zamítnut právě z cenových důvodů. Můžeme ale využívat výstupy - řešení, grafy, obrázky a pod.

Snažíme se proto vybudovat on-line internetové aplikace aspoň pro odstranění některých obtížných mechanických postupů. Jde o slepou uličku, která nám má jen pomoc překonat současné obtíže.

Jinak se dlouhodobě orientujeme na používání vhodného software přímo ve výuce. Vzhledem k rozšíření a dostupnosti výpočetní techniky je možné řadu mechanických výpočtů (které jsou sice nezbytné pro zdárné vyřešení zadání, ale které jinak nepřinášejí nic nového), nahradit použitím výpočetní techniky.

Když upozorňujeme na nutnost provádět ověření podmínek existence a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy, pokládají to studenti zpočátku pouze na zbytečné obtěžování, pokud se jim nepředvede ukázka, že mohou dojít ke zcela chybným závěrům.

Když jim naopak dáme jednoduchou lineární rovnici

$$y' = 5y - x^2 + 0.4x, \quad y(0) = 0,$$

která má přesné analytické řešení

$$y(x) = 0.2x^2$$

a ukážeme jim, že řešení této rovnice jim známou numerickou metodou Rungeovou - Kuttovou bude havarovat (Protože bez ohledu na velikost kroku  $h$  dojde vždy k tomu, že numerické řešení sklouzne do záporné oblasti, ačkoliv má být vždy nezáporné.), potom většinu přítomných zaujme vysvětlení stability řešení pro určité třídy rovnic.

Další oblastí, kde s úspěchem využíváme softwarové vybavení, je kreslení grafů a celková vizualizace řešení. Důvodem je postupné omezování výuky geometrie na všech stupních škol a z toho plynoucí problémy našich studentů. Pro mnohé z nich je problematické si pořídit vlastní náčrtek. A to dokonce i v případě funkce jedné proměnné. Jakmile se dostáváme k parciálním diferenciálním rovnicím, a tedy k funkcím více proměnných, tak už mají problémy prakticky všichni studenti. Přitom se ve výuce většinou omezujeme na funkce dvou proměnných, jejichž grafické vyjádření je možné si nakreslit.

U studentů celkově patří poslední dva okruhy, které jsou věnované parciálním diferenciálním rovnicím, k nejméně oblíbeným partiím z celého kurzu. Do značné míry je tato situace podmíněna tím, že studenti nemají dostatečné znalosti z geometrie a proto si obtížně představují řešení a operace s jeho hledáním. Jako příklad může sloužit parametricky zadaná počáteční křivka u parciálních diferenciálních rovnic. Většinu studentů dělá problém si vůbec představit tvar

takové křivky. Protože se nemůžeme opírat o názornou geometrickou představu, snažíme se ji nahradit počítačovým vykreslením hledané křivky. Při standardním axonometrickém promítání už studenti dokáží i například proložit danou křivkou plochu kolmou na některou ze souřadnicových rovin. V základních případech jde o řešení parciální diferenciální rovnice prvního stupně.

**Příklad:** Najděte řešení rovnice

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

které prochází křivkou  $\Theta$

$$x = 0, \quad z = y^2, \quad y \in (-1, 1).$$

**Řešení.** Křivka  $\Theta$  je v našem případě parabola, která leží v rovině  $Oyz$ . Řešením je válcová plocha, která prochází křivkou  $\Theta$  a je rovnoběžná s  $x$ -ovou osou. Jedná se o funkci

$$z = y^2.$$

Zobrazením grafu funkce si studenti současně i ujasní, že řešením je opravdu plocha a že analytický zápis je pouze rovnicí její řídicí přímky.

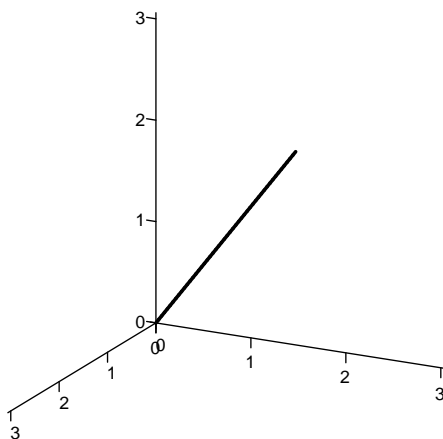
**Příklad:** Najděte řešení rovnice

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x^2 + xy - y^2,$$

které prochází křivkou  $\Theta$  zadanou parametricky

$$x = t, \quad y = t, \quad z = t, \quad t > 0.$$

**Řešení.** Křivka  $\Theta$  je v tomto případě osou prvního oktantu.



Obrázek 1: Počáteční křivka

Řešení získáme integrací podle proměnné  $x$ :

$$z = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y}{2} - xy^2 + H(y).$$

Řešení musí procházet křivkou  $\Theta$ . Dosazením za  $x, y, z$  parametrické vyjádření křivky  $\Theta$  dostaneme, že musí platit

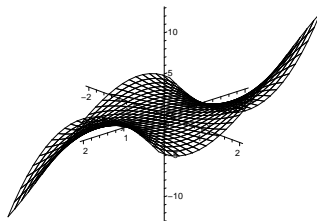
$$t = \frac{t^3}{3} + \frac{t^3}{2} - t^3 + H(t).$$

Odtud dostáváme

$$H(y) = t + \frac{t^3}{6}.$$

Řešením naší úlohy je funkce

$$z = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2y}{2} - xy^2 + y + \frac{y^3}{6}.$$



Obrázek 2: Výsledná plocha

**Příklad:** Najděte řešení rovnice

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = 3x^2 + y \sin x,$$

kteřé prochází křivkou  $z(0, y) = y^3$ .

**Řešení.** V tomto případě platí

$$z(x, y) = \int_0^x (3\xi^2 + y \sin \xi) d\xi + y^3.$$

Po integraci dostaneme řešení ve tvaru

$$z(x, y) = x^3 + y^3 + y(1 - \cos x).$$

Jestliže tyto jednoduché příklady vyvolávají u studentů potíže, je zřejmé, že při určování charakteristik a nebo při přechodu k parciálním diferenciálním rovnicím druhého řádu jde o potíže na podstatně vyšší úrovni a týkají se mnohem většího počtu studentů.

Přitom použitím libovolného grafického systému se daří většinu problémů zcela nenásilně odstranit. Odpadnou problémy s názorností výkladu a nedostatečnou geometrickou přípravou studentů.

Do učebního textu byla nově zařazena i samostatná kapitola o řešení parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu metodou konečných prvků s využitím programu MATLAB.

Musíme si ale dávat zvýšený pozor na to, abychom ve studentech nevzbudili falešnou představu, že každá diferenciální rovnice je řešitelná.

## 5 Závěr

Problém rychlého zapomínání, který se týká všech předmětů, nejen diferenciálních rovnic, je hlavní potíží, se kterou se střetáváme v navazujícím magisterském studiu.

Předchozí nedostatečnou geometrickou přípravu se snažíme nahradit použitím vhodného matematického software.

**Poděkování:** Práce byla podpořena grantem FRVŠ 2256/2007.

## Reference

- [1] Baštinec, J.: *Matematika pro bakaláře na FEKT VUT*, Zborník, 28. konferencia o matematike na vysokých školách technických, ekonomických a poľnohospodárskych. Žilina: Žilinská univerzita, 2004, 13 - 23, ISBN 80-8070-287-X.
- [2] Baštinec, J.: *Nedostatky v matematickej prípravě absolventů středních škol z pohledu učitele VUT*. DIDZA (Didactic Conference in Žilina with international participation). Žilina, Slovensko: Faculty of Science, University of Žilina, 2004, 15 - 22, ISBN 80-8070-270-5.
- [3] Baštinec, J., Diblík, J.: *Výuka matematiky v magisterském studiu na FEKT VUT*. XXIII International Colloquium on The Acquisition Process Management, Sborník abstraktů a elektronických verzí příspěvků na CD-ROM. University of Defence, Brno, 2005, 1 - 5, ISBN 80-85960-92-3.
- [4] Baštinec, J., Diblík, J.: *Předmět "Diferenciální rovnice a jejich použití v elektrotechnice"*. The 4th International Conference about Mathematics and Physics. Brno: Universita obrany, Brno, 2005, 23 - 28, ISBN 80-85960-91-5.
- [5] Baštinec, J., Diblík, J.: *Diferenciální rovnice v navazujícím magisterském studiu na FEKT VUT*. 4. mezinárodní matematický workshop. Brno: FAST VUT, 2005, 19- 20, ISBN 80-214-2998-4.
- [6] Baštinec, J., Diblík, J.: *Diferenciální rovnice v navazujícím magisterském studiu na FEKT VUT*. Sborník příspěvků na CD-ROM. The 4th International Mathematical Workshop. Brno: FAST VUT, 2005, 1 - 7, ISBN 80-214-2998-4.
- [7] Baštinec, J.: *Výuka matematiky na FEKT VUT Brno (v bakalářském i magisterském studiu)*. 37.konferencia slovenských matematikov. Žilina: Slovenská matematická spoločnosť, 2005, 17 - 22, ISBN 80-8070-484-8.
- [8] Diblík, J., Baštinec, J., Růžičková, I.: *Diferenciální rovnice a jejich použití v elektrotechnice*. 1 vyd. Brno: FEKT VUT, 2005, 1 - 174 . ISBN MAT502.
- {[https://www.feec.vutbr.cz/et/skripta/umat/Diferencialni\\_rovnice\\_S.pdf](https://www.feec.vutbr.cz/et/skripta/umat/Diferencialni_rovnice_S.pdf)}
- [9] Diblík, J., Baštinec, J., Hlavičková, I., Šmarda, Z.: *Diferenciální rovnice a jejich použití v elektrotechnice*. 1 vyd. Brno: FEKT VUT, 2007, 1 - 200 .
- {[https://www.feec.vutbr.cz/et/skripta/umat/Diferencialni\\_rovnice\\_S.pdf](https://www.feec.vutbr.cz/et/skripta/umat/Diferencialni_rovnice_S.pdf)}
- [10] Růžičková, I: *Matematika v bakalářském studiu na FEKT VUT aneb nebylo by méně více?* XXII. International Colloquium on the Acquisition Process Management, Vyškov 2004, 1-3. ISBN 80-7231-116-6.