Počátky matematické analýzy ve středoškolských učebnicích

Zdeňka Hencová
22519@mail.muni.cz

Vznik matematické analýzy

17. století - Newton, Leibniz

Pojem funkce

Leibniz
Johann Bernoulli - první definice tohoto pojmu
Leonhard Euler - přesnější definici pojmu funkce, zavedení symbolu $f(x)$ pro zápis funkční závislosti

19. století

- první pokusy o začlenění matematické analýzy do výuky matematiky na středních školách

1849 - 1908

(Exner-Bonitzův program - Marchetova reforma)

- z témat spadajících do matematické analýzy ve školních osnovách pouze téma aritmetických posloupností a řad
- termíny nepřesně vymezeny

období po Marchetově reformě

- obsahové změny v matematice
- první podněty - již o půl století dříve
- nejvýznamnější iniciátor německý matematik **Felix Klein** (1849–1925)

Mezinárodní kongresy matematiků

1897

- první mezinárodní kongres matematiků **v Zürichu**
- **Felix Klein**
- přednáška ***Zur Frage des höheren matematischen Unterrichts***

1900

- druhý mezinárodní kongres **v Paříži**
- ustanovení mezinárodní sekce pro vyučování matematice

1904

- třetí mezinárodní kongres matematiků **v Heidelbergu**
- řešena otázka didaktiky a obsahu středoškolské matematiky jako reakce na dění

v evropských zemích, kde od roku 1900 rostla snaha o změny středoškolské matematiky

- Francie, Anglie, USA

Německo

1904 - shromáždění německých přírodovědců ve Vratislavi

- ustanovení komise pro vyučování matematice a přírodovědným předmětům
- na základě Kleinova podnětu vytvořen návrh na úpravu matematického vzdělání

1905 - shromáždění německých matematiků v Meranu

- návrh přijat pod názvem **meranský program**
- do středoškolského učiva matematiky zařazeny prvky matematické analýzy - pojem funkce, problematika elementárních funkcí a základy diferenciálního a integrálního počtu

1907 - shromáždění německých přírodovědců v Drážďanech

- návrh doplněn didaktickou složkou
- program uveden roku 1908 zkušebně do praxe

První autoři česky psaných učebnic - 60. léta 19. století

Václav Jandečka

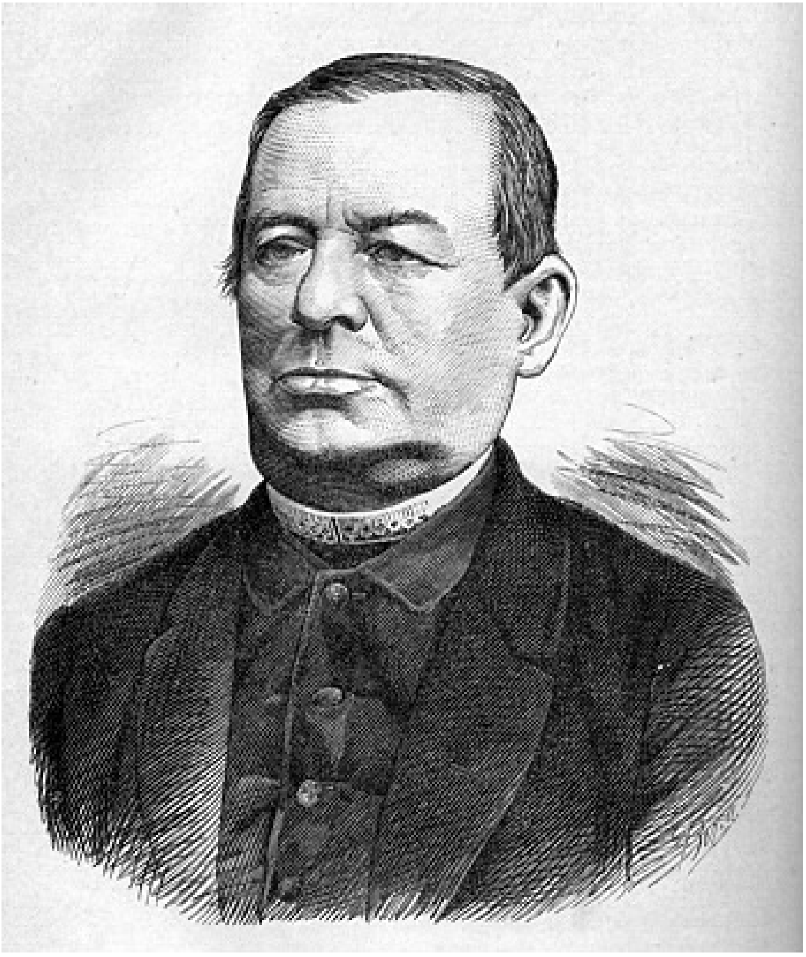
Václav Šimerka

- působil na gymnáziu v Českých Budějovicích
- autor učebnice **Algebra čili počtářství obecné pro vyšší gymnasia**
- v **Přídavku** zpracován úvod k diferenciálnímu a integrálnímu počtu
- učebnice byla publikována v roce 1863, přídavek samostatně o rok později

Václav Šimerka

20. prosince 1819 - 26. prosince 1887

(Vysoké Veselí - Praskačka)



ALGEBRA

čili

počtářství obecné

pro vyšší gymnasia.

Sepsal

Václav Šimerka
farář ve Slatině u Žamberka.

V PRAZE.
Tiskem a nákladem Dr. E. Grégra.
1863.

PŘÍDAVEK

k Algebře pro vyšší gymnasia,

jíž sepsal

Václav Šimerka,

farář ve Slatině.

S osmi obrazci.

V PRAZE.

Tiskem a nákladem Dr. E. Grégra.

1864.

v předmluvě uvedeno, že se pro tento krok rozhodl

> *. . . dle rady některých z mých vědeckých přátel a maje za to, že čas nynější toho požaduje,. . .*

Pražské návrhy (Prager Vorschläge)

- 9. německo-rakouský středoškolský den
9. dubna 1906 ve Vídni
- školní rada **Karel Zahradníček**

K otázce infinitesimálního počtu na rakouské střední škole

I. Je velmi žádoucí, aby ve středoškolské matematice byl obsažen pojem funkce a prvky diferenciálního a integrálního počtu; je to nutné při moderním pojetí didaktiky matematiky, má-li odpovídat současnému vědeckému pojetí a je to nutné i pro použití ve fyzice, která svým charakterem spadá do oblasti infinitesimální analýzy, jejíž metody zde mohou být jednoduše užity.

II. Na základě uvedené zprávy prosím vážené kolegy učitele, kteří jsou přesvědčeni o nutnosti reformovat matematické vzdělání navrženým směrem, aby ve vlastní školní praxi použili ve vymezených hranicích metody matematické analýzy buďto podle vlastního uvážení, nebo podle výběru, který by provedly oba vídeňské středoškolské spolky "Střední škola" a "Reálná škola". Získané zkušenosti by měly být vzaty na zřetel při navrhování nových učebních plánů pro střední školy i při tvorbě učebních pomůcek, zvláště učebnic matematiky.

První učebnice odpovídající upraveným osnovám

(téma diferenciálního a integrálního počtu)

Bohumil Bydžovský

Aritmetika pro VI. až VII. třídu gymnasií a reálných gymnasií (1911)

Aritmetika pro nejvyšší třídu gymnasií a reálných gymnasií (1912)

- nahradily učební materiály Emanuela Taftla a Františka Honzy, používané od 80. let 19. stol.
- autor určený Jednotou

Jan Vojtěch

Geometrie pro VII. třídu reálek (1912)

- obsaženo téma *Začátky počtu infinitesimálního*

Bydžovský, Vojtěch

Sbírka úloh z matematiky (1924)

Josef Vinš

Geometrie pro sedmou třídu reálek a pro sedmou a osmou třídu ref. reálných gymnasií (1942)

- autor nepůsobící pod záštitou Jednoty

XVII. Řady

Řada (series) vůbec jest více čísel po sobě jdoucích, jež jistým pravidlem souvisí.

názvosloví:

- ***člen řady***
- ***obecný* (n*-tý) člen***
- index ...... ***ukazovatel***
- podle počtu členů:

posloupnosti konečné a nekonečné

- podle růstu (respektive poklesu) hodnot členů

posloupnosti vstupující a padající

pojem funkce, funkce aritmetická:

Výraz, v němž stálé a proměnné veličiny přicházejí, nazývá se úkon čili funkce veličin těchto, kteráž aritmetickou slove, pakli proměnné veličiny pouze co kořen mocnosti kterés tu přicházejí, jako $\mathbf{M = an^2 + bn + c}$ ***neb*** $\mathbf{N = gt^3 + htu^2}$***, kdež první jednu proměnnou*** $\mathbf{n}$***, druhá pak dvě totiž*** $\mathbf{t, u}$ ***má. Aritmetické funkce rozeznáváme jako rovnice dle nejvyšší mocnosti, v níž se veličina proměnná nachází, ve stupně; z uvedených funkcí jest tedy*** $\mathbf{M}$ ***druhého,*** $\mathbf{N}$ ***pak třetího stupně.***

Sčítání členů aritmetické posloupnosti vyššího stupně v geometrických úlohách

Určení:

- **počtu dělových koulí, které tvoří pravidelný čtyřstěn, je-li hrana tvořena n koulemi**
- **počtu dělových koulí, které tvoří pravidelný čtyřboký jehlan, je-li hrana podstavy tvořena n koulemi**
- **počtu dělových koulí vytvářejících hromadu tvaru čtyřbokého jehlanu s podstavou obdélníka o m $\times$ n koulích**
- **čísel pěti- (resp. šesti-)úhelníkových**

Přídavek k Algebře pro vyšší gymnasia

partie věnovaná diferenciálnímu a integrálnímu počtu - rozdělena do šesti částí:

I. Differencialy daných úkonů.
II. Proměňování úkonů v řady.
III. Úkony trigonometrické.
IV. Taylorova poučka a její následky.
V. Základy počtu integrálného.
VI. Upotřebení počtu nekonečného v geometrii.

Diferenciálem u Šimerky rozuměna

…nesmírně čili nekonečně malá část, o niž spojitou proměnnou veličinu ($\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$, ***atd.) růsti necháme, jmenuje se differencial (lišné, rozčinek) veličiny této, a znamená písmenem*** δ ***před veličinu onu postavenou (*** $\delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{y}, \delta\mathbf{z}$ ***atd.).***

Differencialy jsou tedy veličiny nalézající se mezi nullou a nejmenšími zlomky, jaké kdy v praktickém počtu přicházejí.

Motivační a ilustrační příklad - práce s logaritmickými deskami

Obyčejně počítáme nejvýš v 7mi neb 8mi cifrách, pro které i logaritmické desky upraveny jsou: představují-li tedy x, y *třeba i celá* 10*ticifrová čísla, zvětší se sice* x*, pakli k němu*

$$\frac{y}{10^m}$$

(kdež m as sto neb ještě více jest) přičteme, a zmenší, pakli zlomek ten odejmeme, ale změna ta jest tak malá, že se logaritmických desk ani netýká, a proto se též vždy místo

$$x \pm \frac{y}{10^m}$$

čili $x \pm \delta y$ *pouze* x *bráti může.*

Kdyby se

$$\delta y = \frac{y}{10^m}$$

při $m = 100$ *velikým zdálo, vezme se* m *větší, tedy* δy *ještě menší.*

Sčítání (odčítání) diferenciálů různých mocností:

$$g(\delta x)^2 + h(\delta x)^3 = (\delta x)^2(g + h\delta x) = g(\delta x)^2$$

Odvození pravidel pro diferencování

> *…tedy $\delta y = f(x + \delta x) - y$ čili $\delta fx = f(x + \delta x) - fx$; differencial funkce každé nalezneme tedy, když od změněné funkce původní úkon odejmeme.*

Určení diferenciálu funkce logaritmus a exponenciální funkce s obecným základem:

$$\delta \log x = fx.\delta x,$$

kde fx je neznámá funkce. Do rovnice dosadí za proměnnou x výraz x^n, tedy

$$\delta \log x^n = f(x^n)\delta(x^n).$$

Po úpravě

$$n\delta \log x = nx^{n-1}f(x^n)\delta x.$$

Dosazením dostane

$$xfx = x^n f(x^n).$$

Položí $\quad x^n = a, \quad afa = A,$
dostane:

$$fx = \frac{A}{x}, \quad \delta \log x = \frac{A\delta x}{x}.$$

Pro $A = 1$ nazývá Šimerka logaritmus přirozeným a odvozuje diferenciál δa^x.

Položí $a^x = y$ a po zlogaritmování dostává

$$x \ln a = \ln y,$$
$$\ln a \delta x = \frac{\delta y}{y}.$$

Po úpravě

$$\delta a^x = \ln a a^x \delta x.$$

Po dosazení $a = e$ dostane δe^x.

Proměňování úkonů v řady

Mnohé úkony proměnné x dají se naznačiti řadou dle mocnosti z x vystupující, totiž

$$fx = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots A_r x^r,$$

kdež $A_0, A_1, A_2, A_3 \dots A_r$ stálé, posud však neznámé veličiny jsou.

Taylorova poučka

Každou funkci proměnné x můžeme naznačit rovnicí

$$fx = Ax^a + Bx^b + Cx^c + \dots\dots$$

po dosazení výrazu $x+h$ za x a přeskupení

$$f(x+h) = f(x) + hf^1(x) + \frac{h^2}{2} f^2(x) + \dots$$

l'Hospitalovo pravidlo

Je-li

$$\frac{fx}{\varphi x}$$

dáno, což při $x = a$ *ve*

$$\frac{fa}{\varphi a} = \frac{0}{0}$$

přechází, jest $\frac{0}{0}$ *veličina neurčitá; bychom ji nalezli, vyhledejme* f^1x, φ^1x *a bude*

$$\frac{fa}{\varphi a} = \frac{f^1a}{\varphi^1a};$$

pakliby ale i tu $f^1a = \varphi^1a = 0$ *se stalo, určeme dále* f^2x, φ^2x, *kdež se potom* $\frac{fa}{\varphi a} = \frac{f^2a}{\varphi^2a}$ *neboli* $= \frac{f^3a}{\varphi^3a}$ *atd. objeví.*

funkce $f(x+h)$ a $\varphi(x+h)$ rozvine do řady dle Taylorovy poučky.

Při $x = a$ platí podle předpokladu $f(a) = \varphi(a) = 0$

Ve zlomku $\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}$ pak po zkrácení rozvojů obou funkcí číslem h:

$$\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \frac{f^1(a) + \frac{1}{2}hf^2(a) + \frac{1}{3!}h^2f^3(a) + \dots}{\varphi^1(a) + \frac{1}{2}h\varphi^2(a) + \frac{1}{3!}h^2\varphi^3(a) \dots}$$

Dále pak autor pokládá $h = 0$ a na základě tohoto kroku dospívá k dokazovanému tvrzení.

Jsou-li funkce $f^1(a)$ a $\varphi^1(a)$ nulové, celou úvahu opakuje. Analogicky postupuje až po první nenulový jmenovatel.

Integrace

Uvádění veličin nekonečně malých čili úkonů differencialných na konečné nazývá se integrováním (celením), a protož jsou differencování a integrování výkony protivné.

Integrace per partes - *počástné integrování*

$$\int \delta x \sqrt{a^2 - x^2} = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 \delta x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Rozklad integrované funkce na parciální zlomky

$$\int \frac{x^2 \delta x}{(x^2 - 1)^2}$$