Křivky v digitálním prostoru

Vladimír Žák
Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně
Technická 2, 616 69 Brno
e-mail: zakyn@centrum.cz

Abstrakt

Rychlé algoritmy pro konstrukce křivek a ploch jsou velmi důležité pro zobrazování dat při matematickém modelování problémů i všední práci na počítači. Jsou tedy vyžadovány jak odbornou tak širokou veřejností. V době stálého navyšování výkonu a úložného prostoru dnešní výpočetní techniky se často opomíjí důležitost tvorby efektivních a výkonných softwarových řešení, která jsou velmi často nahrazována zvyšujícím se výkonem dnešních počítačů.

Návrh, vývoj a implementace rychlých grafických algoritmů je založen na matematické teorii, která umožní rychlé zobrazování křivek a ploch. Tyto objekty jsou základem jakýchkoliv grafických systémů. Implementace algoritmů lze pomocí vytvořeného softwarového řešení porovnat z různým komerčním softwarem, např. systémem Maple.

Příspěvek obsahuje základní matematické pojmy potřebné pro tvorbu velmi efektivních grafických algoritmů a jejich výsledky porovnává na zvoleném příkladu s algebraickým systémem Maple.

1 Úvod

Konstrukce křivek a ploch je v době rozvoje výpočetní techniky základním stavebním kamenem pro zobrazování dat. Z hlediska uživatele by toto grafické zpracování mělo být velmi rychlé, aby zbytečně nezatěžovalo systém jako celek. Bohužel se v dnešní době setkáváme s produkty, které nabízejí stále nové a nové grafické funkce, ale opomíjejí jejich rychlost, někdy dokonce i správnost zobrazení.

Základním problémem je však absence nebo nesprávné definice základních pojmů, které vedou k mylné interpretaci a následnému použití. Příkladem odborné literatury, kde nenalezneme definice základních pojmů jako jsou pixel a obraz, může být např. monografie o počítačové grafice [3], kde autoři uvádějí definice základních pojmů pomocí tzv. definic příkladem, kdy uvádějí: „Při hledání definice obrazu narazíme na určité problémy. Jejich příčinou je fakt, že člověk není objektivní metr a lidské vnímání lze obtížně kvantifikovat. Většina disciplín, které pracují s obrazem, používá definice ad hoc, které nejlépe vyhovují jejich potřebám. V dalším textu budeme obraz chápat intuitivně, jako průmět reálného oka na sítnici, ...“[3].

Příkladem špatných definic může být např. definice logického a fyzického pixelu. Současná počítačová literatura tyto pojmy většinou nerozlišuje [5]. Pokud jsou rozlišeny, můžeme se např. dočíst: „Fyzické pixely jsou body, které jsou používány pro zobrazování na výstupním zařízení... tyto pixely jsou přímo ovládány hardwarem výstupního zařízení...“[2]. Dále je v této literatuře uveden obrázek šachovnice, která reprezentuje výstupní zařízení (viz. [1], [2]). Takto chápané „fyzické pixely“ však nejsou na výstupním zařízení vůbec závislé, protože se nejedná o fyzické pixely, ale o jejich matematické modely. Příkladem může být také definice pixelu jako obrazového elementu, ze kterého je složen rastrový obrázek (viz. [4]).

Další z řady problémů můžeme nazvat absencí matematického myšlení. I když jsou dnes známy velmi rychlé algoritmy pro konstrukci úsečky a kružnice v rovině (Bresenham, viz. [6]), nedošlo zatím k zobecnění těchto rychlých algoritmů pro konstrukci křivky v rovině či úsečky a kružnice v prostoru. Toto zobecnění by přineslo požadovaný průlom pro zrychlení grafického zobrazování.

Nakonec můžeme konstatovat, že na rozvoji, či spíše stagnaci této oblasti se značně podepisují komerční zájmy, které vedou k nepublikování, zatajování či dokonce úmyslnému zamlžování výsledků v důsledku obchodního tajemství a konkurenceschopnosti. To v praxi znamená, že vývoj grafických algoritmů a systémů probíhá odděleně v jednotlivých softwarových firmách a nejdůležitější komoditou jsou právě rychlé zobrazovací algoritmy a na nich postavené technologie.

Je nutné ještě poznamenat, že při vývoji grafických systémů se dnes používají zejména technologie jako je např. OpenGL, popř. DirectX. Tyto technologie jsou přímo podporovány grafickými kartami počítačů, jsou tedy velmi rychlé a nezatěžují systém jako celek. Objektivně však musíme přiznat, že užití těchto technologií má mnoho výhod, ale i jednu nevýhodu a to dosti zásadní. Nevýhodou je jejich používání jako tzv. černých skříněk, kdy jsou na vstupu předána nějaká data a na výstupu jsou zpracovaná data, aniž by bylo zcela zřejmé, co se s daty uvnitř stalo.

2 Definice pojmů

DEFINICE 1: multiindex
Nechť ${}_kI = \{0, 1, \ldots, i_k, \ldots, m_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ jsou indexové množiny. Pak množinu

$$\mathbf{I}^{(n)} = \prod_{k=1}^{n} {}_kI$$

nazýváme multiindexem.

DEFINICE 2: nosič prostoru
Nechť ${}_kJ = \langle a_k; b_k \rangle$, $k = 1, 2, \ldots, n$ jsou intervaly. Množinu

$$\mathbf{J}^{(n)} = \prod_{k=1}^{n} {}_kJ$$

nazýváme n-rozměrným nosičem digitálního prostoru.

POZNÁMKA 1:
V celém dalším textu bude $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

DEFINICE 3: multidělení
Nechť ${}_kD = \{{}_kx_0, {}_kx_1, \ldots, {}_kx_{i_k}, \ldots, {}_kx_{m_k}\}$ jsou ekvidistantní dělení intervalů ${}_kJ = \langle a_k; b_k \rangle$. Množinu

$$\mathbf{D}^{(n)} = \prod_{k=1}^{n} {}_kD$$

nazýváme ekvidistantním multidělením nosiče $\mathbf{J}^{(n)}$.

DEFINICE 4: digitální prostor, rozlišení
Nechť $\mathbf{J}^{(n)} = \prod\limits_{k=1}^{n} {}_kJ$ je nosič digitálního prostoru, $\mathbf{D}^{(n)} = \prod\limits_{k=1}^{n} {}_kD$ jeho ekvidistantní multidělení. Uspořádanou dvojici

$$\mathcal{D}^n = (\mathbf{J}^{(n)}; \mathbf{D}^{(n)})$$

nazýváme n-rozměrným digitálním prostorem. Uspořádanou n-tici

$$\mathbf{r} = (m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots, m_n)$$

nazýváme rozlišení prostoru $\mathcal{D}^{(n)}$.

DEFINICE 5: fyzická doména
Podmnožinu $\mathbf{F}^{(n)} \subset \mathbf{J}^{(n)}$ nosiče $\mathbf{J}^{(n)}$ digitálního prostoru $\mathcal{D}^{(n)} = (\mathbf{J}^{(n)}; \mathbf{D}^{(n)})$ nazýváme fyzickou *n-D* doménou právě tehdy když

$$\mathbf{F}^{(n)} = \langle\ {}_1x_{i_1};\ {}_1x_{i_1+1}) \times \langle\ {}_2x_{i_2};\ {}_2x_{i_2+1}) \times \ldots \times \langle\ {}_kx_{i_k};\ {}_kx_{i_k+1}) \times \ldots$$

$$\ldots \times \langle\ {}_nx_{i_n};\ {}_nx_{i_n+1}) = \prod_{k=1}^{n} \langle\ {}_kx_{i_k};\ {}_kx_{i_k+1})$$

Zapisujeme

$$\prod_{k=1}^{n} \langle\ {}_kx_{i_k};\ {}_kx_{i_k+1}) = \mathbf{F}^{(n)}_{[i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots, i_n]} = \mathbf{F_i}^{(n)}$$

Číslo ${}_kv_i =\ {}_kx_{i_k+1} -\ {}_kx_{i_k}$; $i_k \in \mathbf{i}$ nazýváme k-tým rozměrem fyzické *n-D* domény $\mathbf{F_i}^{(n)}$.

VĚTA 1:
k-té rozměry ${}_kv_i$ všech fyzických *n-D* domén $\mathbf{F_i}^{(n)} \in \mathcal{D}^{(n)}$ jsou si rovny.

POZNÁMKA 2:
Věta umožňuje vynechávat u rozměrů fyzické *n-D* domény multiindex, tj. psát jen ${}_kv$. Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme u *n-D* domény rovněž vynechávat údaj o její dimenzionalitě, tj. budeme psát jen doména.

VĚTA 2:
Množina $\mathcal{F}^{(n)} = \left\{ \mathbf{F}^{(n)} = \prod_{k=1}^{n} \langle {}_kx_{i_k}; {}_k x_{i_k+1}) \,; i_k \in\ {}_kI \right\}$ všech fyzických domén nosiče $\mathbf{J}^{(n)}$ digitálního prostoru $\mathcal{D}^{(n)} = \left(\mathbf{J}^{(n)}; \mathbf{D}^{(n)}\right)$ je rozkladem nosiče $\mathbf{J}^{(n)}$.

VĚTA 3:
Nechť $\mathcal{D}^{(n)} = \left(\mathbf{J}^{(n)}; \mathbf{D}^{(n)}\right)$ je digitální prostor, $A, B \in \mathbf{J}^{(n)}$ libovolné body jeho nosiče. Relace $\rho \subset \mathbf{J}^{(n)} \times \mathbf{J}^{(n)}$ definovaná vztahem

$$\rho\,(A, B) \Leftrightarrow \exists \mathbf{F_i} \in \mathcal{F}^{(n)} : A \in \mathbf{F_i} \wedge B \in \mathbf{F_i}$$

je ekvivalence na $\mathbf{J}^{(n)}$.

DEFINICE 6: fyzický prostor
Faktorovou množinu $\mathcal{F}^{(n)} = \mathbf{J}^{(n)}/\rho$ z předchozí věty nazýváme fyzickým prostorem nosiče $\mathbf{J}^{(n)}$ resp. prostoru $\mathcal{D}^{(n)} = \left(\mathbf{J}^{(n)}; \mathbf{D}^{(n)}\right)$. Rozlišením fyzického prostoru $\mathcal{F}^{(n)}$ rozumíme rozlišení prostoru $\mathcal{D}^{(n)}$.

POZNÁMKA 3:
V odborné literatuře se velmi často používá pojem „pixel“ jako „nejmenší obrazový element zobrazitelný na daném výstupním zařízení“. „Nejmenší objemový element“ se často nazývá „voxel“. Tyto dva elementy jsou speciálními případy fyzických domén, pixel je fyzickou *2-D* doménou a voxel je fyzickou *3-D* doménou.

DEFINICE 7: logický prostor, logická doména
Nechť $\mathcal{F}^{(n)}$ je fyzický prostor digitálního prostoru $\mathcal{D}^{(n)}$, ${}_k v$ rozměry jeho fyzických domén. Dále nechť je

$$\mathbf{C} \in \mathbf{J}^{(n)} : \mathbf{C} = [c_1, c_2, \ldots, c_k, \ldots, c_n]; c_k \in \langle 0;\ {}_k v)$$

Množinu

$$_{\mathbf{C}}\mathcal{L}^{(n)} = \prod_{k=1}^{n} \{ {}_k r_{i_k} \in \mathbb{R} | \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\} :$$

$$_k r_{i_k} \in \langle\ {}_k x_{i_k};\ {}_k x_{i_k+1}) \wedge ({}_k r_{i_k} -\ {}_k x_{i_k} = c_k)\}$$

nazýváme logickým prostorem prostoru $\mathcal{D}^{(n)} = (\mathbf{J}^{(n)}; \mathbf{D}^{(n)})$, její prvky ${}_{\mathbf{C}}L_{\mathbf{i}}; \mathbf{i} = [i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots, i_n]$ logické domény. Rozlišením logického prostoru ${}_{\mathbf{C}}\mathcal{L}^{(n)}$ rozumíme rozlišení prostoru $\mathcal{D}^{(n)}$.

DEFINICE 8: mapování fyzického prostoru, řídící bod
Zobrazení ${}_{\mathbf{C}}\varphi : \mathcal{F}^{(n)} \rightarrow {}_{\mathbf{C}}\mathcal{L}^{(n)}$ takové, že ${}_{\mathbf{C}}\varphi(\mathbf{F_i}) = {}_{\mathbf{C}}L_i \Leftrightarrow {}_{\mathbf{C}}L_i \in \mathbf{F_i}$ je bijekce. Toto zobrazení nazýváme mapováním fyzického prostoru $\mathcal{F}^{(n)}$. Bod $\mathbf{C} \in \mathbf{J}^{(n)} : \mathbf{C} = [c_1, c_2, \ldots, c_k, \ldots, c_n]; c_k \in \langle 0;\ {}_k v)$ nazýváme jeho řídicím bodem.

DEFINICE 9: vrcholové a středové mapování
Mapování ${}_{\mathbf{V}}\varphi : \mathcal{F}^{(n)} \rightarrow {}_{\mathbf{V}}\mathcal{L}^{(n)}$, jehož řídicím bodem je bod $\mathbf{V} = [0, 0, \ldots, 0]$, nazýváme vrcholovým mapováním. Mapování ${}_{\mathbf{S}}\varphi : \mathcal{F}^{(n)} \rightarrow {}_{\mathbf{S}}\mathcal{L}^{(n)}$, jehož řídicím bodem je bod $\mathbf{S} = \left[\frac{{}_1 v}{2}, \frac{{}_2 v}{2}, \ldots, \frac{{}_k v}{2}, \ldots, \frac{{}_n v}{2}\right]$ nazýváme středové mapování.

DEFINICE 10: fyzický *n-D* objekt
Nechť $\mathcal{F}^{(n)}$ je fyzický prostor. Fyzickým *n-D* objektem rozumíme libovolnou podmnožinu ${}_F\mathcal{P}^{(n)}$ prostoru $\mathcal{F}^{(n)}$.

DEFINICE 11: logický *n-D* objekt
Nechť ${}_{\mathbf{C}}\mathcal{L}^{(n)}$ je logický prostor. Logickým *n-D* objektem rozumíme libovolnou podmnožinu ${}_L\mathcal{P}^{(n)}$ prostoru ${}_{\mathbf{C}}\mathcal{L}^{(n)}$.

3 Křivky v digitálním prostoru

DEFINICE 12: parametrizovatelná množina, parametrizace množiny
Nechť $G^{(n)} \subset \mathbb{R}^n$ a dále nechť existuje spojité a prosté zobrazení $\gamma : \langle a; b \rangle \rightarrow G^{(n)}$. Pak množinu $G^{(n)}$ nazýváme parametrizovatelnou na intervalu $\langle a; b \rangle$ a zobrazení γ nazýváme její parametrizací.

VĚTA 4:
Označme $\prec_\gamma$ uspořádání množiny $G^{(n)}$ definované následujícím způsobem: $\forall X, Y \in G^{(n)} : X \prec_\gamma Y \Leftrightarrow \gamma^{-1}(X) < \gamma^{-1}(Y)$. Dále označme Γ množinu všech parametrizací $\gamma : \langle a; b \rangle \rightarrow G^{(n)} \subset \mathbb{R}^n$, kde $\langle a; b \rangle$ je libovolný interval. Nechť $\gamma_1; \gamma_2 \in \Gamma$ jsou dvě parametrizace $\gamma_1 : \langle a; b \rangle \rightarrow G_1^{(n)}; \gamma_2 : \langle a; b \rangle \rightarrow G_2^{(n)}$. Na množině Γ definujme relaci ρ takto:

$$\forall \gamma_1; \gamma_2 \in \Gamma : ([\gamma_1; \gamma_2] \in \rho)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left(G_1^{(n)} = G_2^{(n)} = G^{(n)} \wedge \left(\forall X, Y \in G^{(n)} : X \prec_{\gamma_1} Y \Leftrightarrow X \prec_{\gamma_2} Y\right)\right)$$

Pak relace ρ je ekvivalence na Γ.

Ekvivalence ρ indukuje na množině Γ rozklad na třídy $\boldsymbol{\gamma}$ vzájemně ekvivalentních parametrických vyjádření. Každou takovou třídu budeme nazývat jednoduchou křivkou.

DEFINICE 13: jednoduchá křivka

Nechť ρ je ekvivalence z předchozí věty. Každý prvek $\boldsymbol{\gamma}$ rozkladu Γ/ρ množiny Γ indukované relací ρ nazýváme jednoduchou křivkou. Je-li $\gamma : \langle a; b\rangle \to H$ reprezentant jednoduché křivky $\boldsymbol{\gamma}$, pak bod $A = \gamma(a)$ nazýváme počátečním a $B = \gamma(b)$ pak koncovým bodem jednoduché křivky $\boldsymbol{\gamma}$.

DEFINICE 14: součet jednoduchých křivek

Nechť $\gamma : \langle a; b\rangle \to G^{(n)} \subset \mathbb{R}^n$ je libovolný reprezentant jednoduché křivky $\boldsymbol{\gamma}$, $\gamma_1 : \langle a_1; b_1\rangle \to G_1^{(n)}$ resp. $\gamma_2 : \langle a_2; b_2\rangle \to G_2^{(n)}$ libovolní reprezentanti jednoduchých křivek $\boldsymbol{\gamma}_1; \boldsymbol{\gamma}_2$. Množinu $\boldsymbol{\gamma}$ nazýváme součtem křivek $\boldsymbol{\gamma}_1; \boldsymbol{\gamma}_2$ právě tehdy když platí

1. $\langle a_1; b_1\rangle \cup \langle a_2; b_2\rangle = \langle a; b\rangle$
2. $b_1 = a_2 \ \wedge \ \gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$

Značíme $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_1 \oplus \boldsymbol{\gamma}_2$. Křivky, jejichž reprezentanti splňují předchozí podmínky, nazýváme sečitatelnými.

POZNÁMKA 4:

Pokud nebude hrozit nedorozumění, budeme součet jednotlivých křivek značit obvyklým $+$, součet více křivek pak obvyklým sumačním znaménkem.

DEFINICE 15: křivka

Nechť $\{\boldsymbol{\gamma}_i\}_{i=1}^m$ je konečná množina dvou po sobě jdoucích sečitatelných jednoduchých křivek. Křivkou $\boldsymbol{\gamma}$ rozumíme součet $\boldsymbol{\gamma} = \sum\limits_{i=1}^{m} \boldsymbol{\gamma}_i$. Množinu $G_{\boldsymbol{\gamma}}^{(n)} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\boldsymbol{\gamma}_i}^{(n)}$ nazýváme grafem křivky.

POZNÁMKA 5:

Dále budeme pracovat s rovinnými resp. prostorovými křivkami, jejichž parametrizace $\gamma : \langle a; b\rangle \to G^{(2)} \subset \mathbb{R}^2$ resp. $\gamma : \langle a; b\rangle \to G^{(3)} \subset \mathbb{R}^3$ lze psát ve tvaru $\gamma : t \to [x_1; x_2]\, ; x_1 = \varphi(t) \wedge x_2 = \psi(t)$, resp. $\gamma : t \to [x_1; x_2; x_3]\, ; x_1 = \varphi(t) \wedge x_2 = \psi(t) \wedge x_3 = \zeta(t)$.

Z výše uvedeného je zřejmé, že grafy rovinných či prostorových křivek v digitální rovině můžeme sestrojovat pouze s použitím fyzických resp. logických pixelů, tedy jako podmnožinu fyzického resp. logického prostoru digitálního prostoru $\mathcal{D}^{(n)}$ pro $n \in \{2, 3\}$.

DEFINICE 16: fyzický a logický graf křivky

Nechť $\mathbf{J}^{(n)}$ je nosič digitálního prostoru $\mathcal{D}^{(n)}$, $n \in \{2, 3\}$, $\boldsymbol{\gamma} \subset \mathbf{J}^{(n)}$ je rovinná resp. prostorová křivka. Množinu

$${}_F\boldsymbol{\gamma} \subset \mathcal{F} : \ {}_F\boldsymbol{\gamma} = \left\{\mathbf{F_i} \in \mathcal{F} | \mathbf{F_i} \cap G_{\boldsymbol{\gamma}}^{(n)} \neq \phi\right\}$$

budeme nazývat fyzickým grafem křivky $\boldsymbol{\gamma}$. Logický obraz ${}_L\boldsymbol{\gamma}$ fyzického grafu ${}_F\boldsymbol{\gamma}$ křivky $\boldsymbol{\gamma}$ budeme nazývat logickým grafem této křivky. Graf $G_{\boldsymbol{\gamma}}^{(n)}$ křivky k budeme nazývat nositelkou křivky ${}_Fk$ resp. ${}_Lk$.

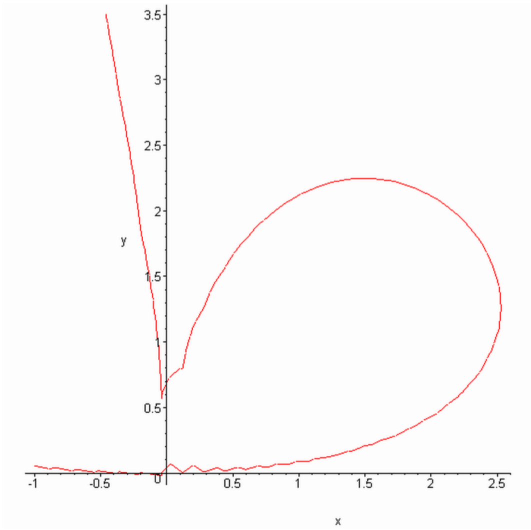
POZNÁMKA 6:

Základní pojmy týkající se ploch lze definovat analogicky. Tyto definice jsou však formálně náročnější.

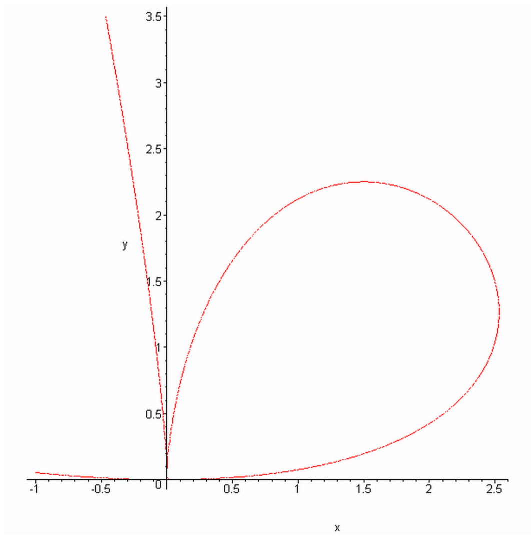
4 Konstrukce implicitně zadaných křivek

V tomto odstavci je uveden příklad, kdy použitá matematická teorie implementovaná do grafického softwarového řešení je podstatně rychlejší a výstup je kvalitnější než v systému Maple.

Konstrukci křivky o rovnici $(\frac{x}{2} + \frac{y}{3})^4 - x^2 y = 0$ v systému Maple můžeme považovat mírně řečeno za problémovou. Výsledkem není námi požadovaná křivka, ale křivka, která se někdy velmi liší (viz. obrázek 1 a 2).



Obrázek 1: Křivka o rovnici $(x/2 + y/3)^4 - x^2 * y = 0$ (špatně)



Obrázek 2: Křivka o rovnici $(x/2 + y/3)^4 - x^2 * y = 0$ (správně)

Bohužel však nemůžeme říct, kde je v konstrukci této křivky chyba, protože algoritmus pro její konstrukci není nikde v dokumentaci ani náznakem popsán. Chyby tohoto typu lze nalézt téměř ve všech obdobných systémech.

Softwarové řešení postavené na výše uvedené matematické teorii umožnilo vytvořit grafický výstup, který je na daném zobrazovacím zařízení nejlepší možný, nelze ho již zkvalitnit. Toto řešení je navíc ještě alespoň 5 krát rychlejší než správné vykreslení dané křivky v systému Maple, kde je potřeba použít parametr *numpoints* pro správné vykreslení dané implicitní křivky.

5 Závěr

Rychlé grafické algoritmy jsou již součástí každodenní lidské činnosti, ať už odborné nebo široké veřejnosti. Zvyšování výkonů dnešní výpočetní techniky umožňuje výrobcům softwaru přidávat stále nové a nové grafické funkce bez dostatečné rychlosti. Základem všech grafických zobrazování je matematická teorie, která umožňuje vytvářet efektivní a velmi rychlé grafické algoritmy.Z výše uvedeného je zřejmé, že aplikace této matematické teorie poskytuje dostatečný prostor pro zrychlení komerčních produktů a tím zkvalitnění práce uživatele.

Reference

[1] Murray, D. J., vanRyper, W.: Encyklopedia of graphics file formats, Inc of Sebastopol, California USA, 1994

[2] Murray, D. J., vanRyper, W.: Encyklopedie grafických formátů, Computer Press, Praha, 1995

[3] Žára, J., Beneš, B., Felkel P.: Moderní počítačová grafika, Computer Press, Praha, 1998

[4] Žára, J., Beneš, B., Felkel P., Sochor., J.: Moderní počítačová grafika, Computer Press, Brno, 2004

[5] Sobota, B.: Počítačová grafika a jazyk C, Kopp, České Budějovice, 1996

[6] Bresenham, J. E.: Algorithm for Computer Control of a Digital Plotter, IBM Systems Journal, 4(1):25-30, 1965