Dvoustupňový přístup k úlohám lineárního progranování

Vojtěch Vitásek
Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky
e-mail: vitas@centrum.cz

Abstrakt

Tento článek se věnuje algoritmu dvoustupňového programování, který se využívá při řešení rosáhlých úloh lineárního programování. Cílem je seznámit čitatele s tímto algoritmem a objasnit mechanismy, které algoritmus využívá.

1 Dvoustupňové programování

Uvažujme úlohu lineárního programování, která má následující tvar:

$$\begin{array}{lrl} \min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{q}^T\mathbf{y}\} & & \\ \text{s.t.} & \mathbf{A}\mathbf{x} & \leq \mathbf{b}, \\ & \mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{W}\mathbf{y} & = \mathbf{h}, \\ & \mathbf{x} & \geq \mathbf{0}, \\ & \mathbf{y} & \geq \mathbf{0}, \end{array} \tag{1}$$

kde $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ jsou neznámé sloupcové vektory o n resp. n_1 složkách, matice $\mathbf{A}$ je typu $m \times n$, matice $\mathbf{T}$ je typu $m_1 \times n$, matice $\mathbf{W}$ je typu $m_1 \times n_1$, vektor $\mathbf{c}$ resp. $\mathbf{q}$ je sloupcový vektor o n resp. n_1 složkách, $\mathbf{b}$ a $\mathbf{h}$ jsou sloupcové vektory o m a m_1 složkách a $\mathbf{0}$ je odpovídající nulový vektor.

Nyní se úlohu (1) pokusíme rozložit na dvě podúlohy, nebo-li dva stupně. Odtud je název *dvoustupňové programování.* Předpokládejme, že úloha je řešitelná a to znamená, že množina $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ je ohraničená. Pak můžeme úlohu (1) rozepsat na tyto dva stupně:

$$\begin{array}{lrl} \min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} + f(\mathbf{x})\} & & \\ \text{s.t.} & \mathbf{A}\mathbf{x} & \leq \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} & \geq \mathbf{0}, \end{array} \tag{2}$$

kde

$$\begin{array}{rrl} f(\mathbf{x}) = \min\{\mathbf{q}^T\mathbf{y}\} & & \\ \text{s.t.} & \mathbf{W}\mathbf{y} & = \mathbf{h} - \mathbf{T}\mathbf{x}, \\ & \mathbf{y} & \geq \mathbf{0}. \end{array} \tag{3}$$

Nyní udělejme úpravu úlohy prvního stupně (2). Protože se jedná o minimalizační úlohu lineárního programování a naší snahou je mít co nejmenší hodnotu účelové funkce, omezme si tedy část této hodnoty shora. Uvažujme podmínku $\theta \geq f(\mathbf{x})$, která nám bude vstupovat do omezení naší úlohy prvního stupně. Mějme tedy:

$$\begin{array}{lrl} \min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} + \theta\} & & \\ \text{s.t.} & \mathbf{A}\mathbf{x} & \leq \mathbf{b}, \\ & \theta - f(\mathbf{x}) & \geq 0, \\ & \mathbf{x} & \geq \mathbf{0}. \end{array} \tag{4}$$

Abychom mohli řešit úlohu (4), je zapotřebí znát hodnotu funkce $f(\mathbf{x})$. Tuto hodnotu však můžeme získat jako hodnotu objektivní funkce úlohy (3). Bohužel však v úloze (3) využíváme proměnnou $\mathbf{x}$ a to způsobuje nemalé potíže. Proto se naskýtá možnost proměnou $\mathbf{x}$ pro úlohu (3) pevně zafixovat, tj. neuvažovat ji jako proměnnou, nýbrž jako danou hodnotu, kterou získáme z řešení úlohy (4). Řešení dvoustupňové úlohy tedy spočívá ve vzájemném poskytování vypočtených hodnot prvního a druhého stupně.

2 Algoritmus dvoustupňového programování

Nechť máme úlohu lineárního programování (1), která je řešitelná. Pak tuto úlohu můžeme řešit pomocí následujícího algoritmu.

Krok 1 Řešme první stupeň úlohy dvoustupňového programování, která má tento tvar:

$$\begin{array}{lll} \min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} + \theta\} & & \\ \text{s.t.} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} & \leq \mathbf{b}, \\ \qquad\;\; \mathbf{x} & \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

Nechť tato úloha prvního stupně má řešení $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\theta})$, které využijeme v následujícím kroku. Pokud jsme ještě nepoužili podmínku (7), tak θ neuvažujme a jako řešení použijme $(\hat{\mathbf{x}}, -\infty)$.

Krok 2 Využijeme řešení prvního stupně $\hat{\mathbf{x}}$ a pomocí tohoto řešení si vypočítáme očekávanou účelovou funkci, tedy druhý stupeň úlohy:

$$\begin{array}{rl} f(\hat{\mathbf{x}}) = & \min\{\mathbf{q}^T\mathbf{y}\} \\ & \text{s.t.} \quad \mathbf{W}\mathbf{y} = \mathbf{h} - \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}, \\ & \qquad\quad\;\; \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

Nyní si k této úloze sestavme úlohu duální.

$$\begin{array}{rl} f(\hat{\mathbf{x}}) = & \max\{(\mathbf{h} - \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}})^T\mathbf{u}\} \\ & \text{s.t.} \qquad \mathbf{W}^T\mathbf{u} \leq \mathbf{q}, \\ & \qquad\qquad\quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{m_1}. \end{array} \tag{5}$$

V tomto okamžiku si uvědomme, že duální úloha (5) musí být řešitelná, protože předpokládáme řešitelnost celého problému, ale mohou nastat dva případy řešení:

(a) Duální úloha (5) má neomezené řešení. Pak přidáme do prvního stupně tuto podmínku

$$\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{T}\mathbf{x} \geq \boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{h}, \tag{6}$$

kde $\boldsymbol{\sigma}$ je směr neomezenosti.

(b) Duální úloha (5) má jedno optimální řešení, které si označíme $\hat{\mathbf{u}}$. Pak přidáme do prvního stupně tuto podmínku

$$\hat{\mathbf{u}}^T\mathbf{T}\mathbf{x} + \theta \geq \hat{\mathbf{u}}^T\mathbf{h}. \tag{7}$$

Krok 3 Řešme nyní úlohu prvního stupně s přidanou podmínkou (6) nebo (7). Obdržíme opět nějaké optimální řešení $(\hat{\mathbf{x}}^T, \hat{\theta})$, a pokračujeme krokem 2.

Algoritmus ukončíme, pokud:

$$\theta \geq \hat{\mathbf{u}}^T(\mathbf{h} - \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}})$$