Dvoustupňový přístup k úlohám lineárního progranování

Vojtěch Vitásek
Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky
e-mail: vitas@centrum.cz

Abstrakt

Tento článek se věnuje algoritmu dvoustupňového programování, který se využívá při řešení rosáhlých úloh lineárního programování. Cílem je seznámit čitatele s tímto algoritmem a objasnit mechanismy, které algoritmus využívá.

1 Úvod

Dvoustupňový přístup k úlohám lineárního programování má využití při řešení rozsáhlých úloh stochastického programování, viz. [1], [2] a [4]. Pomocí tohoto přístupu byly odvozeny různé dekompoziční algoritmy, např. L-shaped algoritmus.

Nejprve uvažujme úlohu lineárního programování, která má následující tvar:

$$\begin{array}{lrcl} \min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{q}^T\mathbf{y}\} & & & \\ \text{s.t.} & \mathbf{A}\mathbf{x} & \leq & \mathbf{b}, \\ & \mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{W}\mathbf{y} & = & \mathbf{h}, \\ & \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0}, \\ & \mathbf{y} & \geq & \mathbf{0}, \end{array} \tag{1}$$

kde $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ jsou neznámé sloupcové vektory o n resp. n_1 složkách, matice $\mathbf{A}$ je typu $m \times n$, matice $\mathbf{T}$ je typu $m_1 \times n$, matice $\mathbf{W}$ je typu $m_1 \times n_1$, vektor $\mathbf{c}$ resp. $\mathbf{q}$ je sloupcový vektor o n resp. n_1 složkách, $\mathbf{b}$ a $\mathbf{h}$ jsou sloupcové vektory o m a m_1 složkách a $\mathbf{0}$ je odpovídající nulový vektor.

Tvar úlohy (1) odpovídá úlohám, které se v praxi velmi často řeší. Proč právě tento tvar, nalezneme v [1] nebo [4]. Dodejme ještě, že většina úloh lineárního programování lze vhodnými úpravami převést právě na úlohu tvaru (1).

2 Dvoustupňové programování

Nyní se úlohu (1) pokusíme rozložit na dvě podúlohy, nebo-li dva stupně. Odtud je název *dvoustupňové programování*. Předpokládejme, že úloha je řešitelná a to znamená, že množina $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ je ohraničená. Pak můžeme úlohu (1) rozepsat takto:

$$\begin{array}{lrcl} \min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} + f(\mathbf{x})\} & & & \\ \text{s.t.} & \mathbf{A}\mathbf{x} & \leq & \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0}, \end{array} \tag{2}$$

kde

$$\begin{array}{rlrcl} f(\mathbf{x}) = & \min\{\mathbf{q}^T\mathbf{y}\} & & & \\ & \text{s.t.} & \mathbf{W}\mathbf{y} & = & \mathbf{h} - \mathbf{T}\mathbf{x}, \\ & & \mathbf{y} & \geq & \mathbf{0}. \end{array} \tag{3}$$

Definice 1. Úlohy (2) a (3) souhrně nazveme *úlohou dvoustupňového programování.*

Nejprve se podívejme na úlohu (2). Toto je úloha lineárního programování pouze s jedinou proměnnou $\mathbf{x}$. Pod $f(\mathbf{x})$ si můžeme představit nějakou konkrétní hodnotu, tedy nějakou konstantu, kterou obdržíme při řešení úlohy (3).

Definice 2. Úlohu (2) nazveme *prvním stupněm* (*první fází*) úlohy dvoustupňového programování a funkci $f(\mathbf{x})$ nazveme *očekávanou účelovou funkcí druhého stupně.*

Definice 3. Úlohu (3) nazveme *druhým stupněm* (*druhou fází*) úlohy dvoustupňového programování.

Nyní udělejme úpravu předchozí úlohy prvního stupně (2). Protože se jedná o minimalizační úlohu lineárního programování a naší snahou je mít co nejmenší hodnotu účelové funkce, omezme si tedy část této hodnoty shora. Uvažujme podmínku $\theta \geq f(\mathbf{x})$, která nám bude vstupovat do omezení naší úlohy prvního stupně. Mějme tedy:

$$\begin{array}{ll} \min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} + \theta\} & \\ \text{s.t.} \qquad \mathbf{A}\mathbf{x} & \leq \mathbf{b}, \\ \theta - f(\mathbf{x}) & \geq 0, \\ \mathbf{x} & \geq \mathbf{0}. \end{array} \tag{4}$$

Abychom mohli řešit úlohu (4), je zapotřebí znát hodnotu funkce $f(\mathbf{x})$. Tuto hodnotu však můžeme získat jako hodnotu objektivní funkce úlohy (3). Bohužel však v úloze (3) využíváme proměnnou $\mathbf{x}$ a to způsobuje nemalé potíže. Proto se naskýtá možnost proměnou $\mathbf{x}$ pro úlohu (3) pevně zafixovat, tj. neuvažovat ji jako proměnnou, nýbrž jako danou hodnotu, kterou získáme z řešení úlohy (4). Řešení dvoustupňové úlohy tedy spočívá ve vzájemném poskytování vypočtených hodnot prvního a druhého stupně. Jediný problém je ještě v prvním kroku algoritmu, ale ten vyřešíme pomocí pevně a vhodně zvolené hodnoty očekávané zdrojové funkce $f(\mathbf{x})$.

3 Algoritmus dvoustupňového programování

Nechť máme úlohu lineárního programování (1), která je řešitelná. Pak tuto úlohu můžeme řešit pomocí následujícího algoritmu.

Krok 1 Zvolme θ_0 tak, aby platilo $\theta_0 \leq f$, kde

$$\begin{array}{rlll} f = \min\{ & & \mathbf{q}^T\mathbf{y}\} & \\ \text{s.t.} & \mathbf{A}\mathbf{x} & & \leq \mathbf{b}, \\ & \mathbf{T}\mathbf{x} + & \mathbf{W}\mathbf{y} & = \mathbf{h}, \\ & \mathbf{x} & & \geq \mathbf{0}, \\ & & \mathbf{y} & \geq \mathbf{0}. \end{array} \tag{5}$$

Pak řešme první stupeň úlohy dvoustupňového programování, která má tento tvar:

$$\begin{array}{llll} \min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} + \theta\} & & & \\ \text{s.t.} & \mathbf{A}\mathbf{x} & & \leq \mathbf{b}, \\ & & \theta & \geq \theta_0, \\ & \mathbf{x} & & \geq \mathbf{0}. \end{array} \tag{6}$$

Nechť tato úloha prvního stupně má řešení $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\theta})$, které využijeme v následujícím kroku. Pokud by úloha (5) byla velmi rozsáhlá nebo špatně řešitelná a způsobylo by nám to nemalé potíže při určení hodnoty θ_0, budeme řešit úlohu (6) bez neznámé θ a pochopitelně neuvažovat druhé omezení, kde se θ vyskytuje. Potom za řešení úlohy prvního stupně vezmeme $(\hat{\mathbf{x}}, -\infty)$. Tohoto se v praxi užívá častěji, protože většinou řešíme rozsáhlé úlohy.

Krok 2 Využijeme řešení prvního stupně $\hat{\mathbf{x}}$ a pomocí tohoto řešení si vypočítáme očekávanou účelovou funkci, tedy druhý stupeň úlohy:

$$\begin{aligned} f(\hat{\mathbf{x}}) = \min\{&\mathbf{q}^T\mathbf{y}\} \\ \text{s.t.}\quad \mathbf{W}\mathbf{y} &= \mathbf{h} - \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}, \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Nyní si k této úloze sestavme úlohu duální. Z teorie lineárního programování víme, že hodnota účelové funkce primární úlohy je stejná jako hodnota účelové funkce duální úlohy (pokud má alespoň jedna z těchto úloh optimální řešení). Můžeme tedy pro $f(\hat{\mathbf{x}})$ psát:

$$\begin{aligned} f(\hat{\mathbf{x}}) = \max\{&(\mathbf{h} - \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}})^T\mathbf{u}\} \\ \text{s.t.}\qquad \mathbf{W}^T\mathbf{u} &\leq \mathbf{q}, \\ \mathbf{u} &\in \mathbb{R}^{m_1}. \end{aligned} \tag{7}$$

V tomto okamžiku si uvědomme, že duální úloha (7) musí být řešitelná, protože předpokládáme řešitelnost celého problému, ale mohou nastat dva případy řešení:

(a) Duální úloha (7) má neomezené řešení, tj. $f(\hat{\mathbf{x}}) = +\infty$. Pak primární úloha (6) nemá přípustné řešení a musíme tedy naše $\hat{\mathbf{x}}$ vyloučit z oboru přípustnosti v primární úloze. Pokusme se tedy sestavit podmínku pro $\mathbf{x}$, kterou dosadíme do primární úlohy, tak abychom vyloučili $\hat{\mathbf{x}}$.

Při řešení duální úlohy (7) obržíme krajní směr $\boldsymbol{\sigma}$, který určuje směr neomezenosti a z lineárního programování pro tento krajní směr platí

$$\mathbf{W}^T\boldsymbol{\sigma} \leq \mathbf{0}$$

a

$$(\mathbf{h} - \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}})^T\boldsymbol{\sigma} > \mathbf{0}.$$

Na druhou stranu musí pro všechna přípustná $\mathbf{x}$ existovat $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ takové, že $\mathbf{W}\mathbf{y} = \mathbf{h} - \mathbf{T}\mathbf{x}$. Pokud tuto rovnici skalárně vynásobíme $\boldsymbol{\sigma}^T$, dostáváme

$$\boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{h} - \mathbf{T}\mathbf{x}) = \underbrace{\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{W}}_{\leq\mathbf{0}}\underbrace{\mathbf{y}}_{\geq\mathbf{0}} \leq 0.$$

Potom tedy pro všechna přípustná $\mathbf{x}$ musí být splněna podmínka

$$\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{T}\mathbf{x} \geq \boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{h}. \tag{8}$$

Tuto podmínku pro $\mathbf{x}$ přidáme do prvního stupně a pokračujeme krokem 3.

(b) Duální úloha (7) má jedno optimální řešení, které si označíme $\hat{\mathbf{u}}$. Pak funkce $f(\hat{\mathbf{x}})$ má konečnou hodnotu:

$$f(\hat{\mathbf{x}}) = (\mathbf{h} - \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}})^T\hat{\mathbf{u}},$$

a dostáváme pro všechna $\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \max\{(\mathbf{h} - \mathbf{T}\mathbf{x})^T\mathbf{u} \mid \mathbf{W}^T\mathbf{u} \leq \mathbf{q}\} \\ &= (\mathbf{h} - \mathbf{T}\mathbf{x})^T\hat{\mathbf{u}} \\ &= \hat{\mathbf{u}}^T(\mathbf{h} - \mathbf{T}\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Pak z omezení $\theta \geq f(\mathbf{x})$ získáme opět omezení pro první stupeň naší úlohy

$$\theta \geq \hat{\mathbf{u}}^T(\mathbf{h} - \mathbf{T}\mathbf{x}),$$

a tedy

$$\hat{\mathbf{u}}^T\mathbf{T}\mathbf{x} + \theta \geq \hat{\mathbf{u}}^T\mathbf{h}. \tag{9}$$

Tuto podmínku pro $\mathbf{x}$ a θ pak přidáme do prvního stupně a pokračujeme krokem 3.

Krok 3 Řešme nyní úlohu prvního stupně s přidanou podmínkou (8) nebo (9). Obdržíme opět nějaké optimální řešení $(\hat{\mathbf{x}}^T, \hat{\theta})$, a pokračujeme krokem 2.

Nakonec musíme ještě stanovit, kdy algoritmus ukončit. Vzhledem k tomu, že druhý stupeň nám stále přidává podmínky do stupně prvního, nabízí se možnost, že algoritmus ukončíme tehdy, když přidaná podmínka nezmění oblast přípustnosti pro $\mathbf{x}$. Ukončující podmínka tedy vypadá takto:

$$\theta \geq \hat{\mathbf{u}}^T(\mathbf{h} - \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}})$$

4 Závěr

Algoritmus dvoustupňového programování nám umožňuje efektivně řešit rozsáhlé úlohy lineárního programování nebo úlohy stochastického programování. Při rozsáhlých úlohách lze algoritmus různě modifikovat. Častá modifikace spočívá v dekompozici rozsáhlé úlohy, tj. rozdělení na menší části a postupném řešení. Více k tomuto využití nalezneme v [1], [2] a [4].

Reference

[1] Kall P., Wallace S.: *Stochastic Programming*, John Wiley & Sons, Inc. 1994.

[2] Popela P.: *Object-Oriented Approach to Stochastic Programming*, Charles University, Praha, 1998.

[3] Plesník J., Dupačová J., Vlach M.: *Lineárne programovanie*, Alfa Bratislava 1990.

[4] Vitásek V.: *Dekompozice ve stochastickém programování*, Diplomová práce, VUT Brno 2005.