Kosinová věta pro čtyřúhelník
(abstrakt)

Mgr. Barbora Šťastná
Přírodovědecká fakulta Masarykovy University
e-mail: stastna@mail.muni.cz

1 Úvod

Článek se zabývá tzv. „kosinovou větou pro čtyřúhelník“ a dalšími zajímavými a jednoduchými vztahy v obecném čtyřúhelníku, jejich důkazy a vzájemnými souvislostmi. V tomto abstraktu jsou všechna tvrzení pouze shrnuta, plný text obsahuje všechny důkazy a podrobné komentáře.

V dalším textu je použito obvyklé značení prvků ve čtyřúhelníku ABCD (a, b, c, d délky stran, e, f délky úhlopříček, α, β, γ, δ velikosti vnitřních úhlů, S obsah a s polovina obvodu). Zmiňovaná tvrzení je možné najít v různých učebnicích a sbírkách úloh pod různými názvy. Všechny důkazy uvedené v článku jsou původní, často však pro svoji jednoduchost jsou jinde uvedeny ve velmi podobném znění.

2 Vybrané vztahy

2.1 Obsah čtyřúhelníka

Pro libovolný čtyřúhelník $ABCD$ platí

$$(4S)^2 = 4e^2f^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2. \tag{1}$$

2.2 Brahmaguptův vzorec

Pro libovolný čtyřúhelník $ABCD$ platí

$$S \leq \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

rovnost nastává právě pro tětivový čtyřúhelník.[1]

Zobecnění

Pro libovolný čtyřúhelník $ABCD$ platí

$$S^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right). \tag{2}$$

Souvislosti

Z uvedeného vztahu plyne, že čtyřúhelník s největším obsahem při zadaných délkách stran je čtyřúhelník tětivový.

[1] Brahmagupta (598–670), indický matematik a astronom. Více o Brahmaguptovi viz např. [1], [2], více o uvedených vztazích viz např. [3], [4] a [5].

2.3 Kosinová věta pro čtyřúhelník (Bretschneiderova věta)

Pro libovolný čtyřúhelník $ABCD$ platí[2]

$$e^2 f^2 = a^2 c^2 + b^2 d^2 - 2abcd \cos(\alpha + \gamma).$$

Souvislosti

Pro zajímavost je možné kosinovou větu pro čtyřúhelník zapsat v podobě kosinové věty pro trojúhelník o stranách ef, ac, bd a vnitřním úhlu $\alpha + \gamma$:

$$(ef)^2 = (ac)^2 + (bd)^2 - 2(ac)(bd) \cos(\alpha + \gamma).$$

Takový trojúhelník skutečně lze sestrojit elementárními postupy z daného čtyřúhelníka.

2.4 Ptolemaiova nerovnost

V libovolném čtyřúhelníku platí

$$ef \leq ac + bd$$

rovnost nastává právě pro tětivový čtyřúhelník.[3]

Reference

[1] *Brahmagupta.* Wikipedia.
http://en.wikipedia.org/wiki/Brahmagupta, 20. 9. 2006.

[2] J. J. O'Connor, E. F. Robertson. *Brahmagupta biography.* School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland.
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Brahmagupta.html, listopad 2000.

[3] *Brahmagupta's formula.* Wikipedia.
http://en.wikipedia.org/wiki/Brahmagupta%27s_formula, 3. 8. 2006.

[4] Weisstein, Eric W. *Brahmagupta's Formula.* From MathWorld–A Wolfram Web Resource.
http://mathworld.wolfram.com/BrahmaguptasFormula.html, 12. 3. 2004.

[5] Weisstein, Eric W. *Bretschneider's Formula.* From MathWorld–A Wolfram Web Resource.
http://mathworld.wolfram.com/BretschneidersFormula.html, 6. 3. 2004.

[6] Gérard P. Michon. *Practical Formulas.* Numericana.
http://home.att.net/ numericana/answer/formula.htm, 19. 8. 2006.

[7] *Ptolemy.* Wikipedia.
http://en.wikipedia.org/wiki/Ptolemy, 19. 9. 2006.

[8] P. Leischner. Ptolemaiova věta. *Matematika–fyzika–informatika*, **15**: 129-135, 2005/2006.

[9] P. Leischner. Ptolemaiova nerovnost. *Matematika–fyzika–informatika*, **15**: 385-392, 2005/2006.

[2] Carl Anton Bretschneider (1808–1878), německý gymnaziální profesor. Více viz např. [6].

[3] Klaudios Ptolemaios (asi 85–165), řecký astronom, matematik, fyzik a zeměpisec. Více o Ptolemaiovi viz např. [7], více o ptolemaiově nerovnosti viz např. [8] a [9].