Kosinová věta pro čtyřúhelník

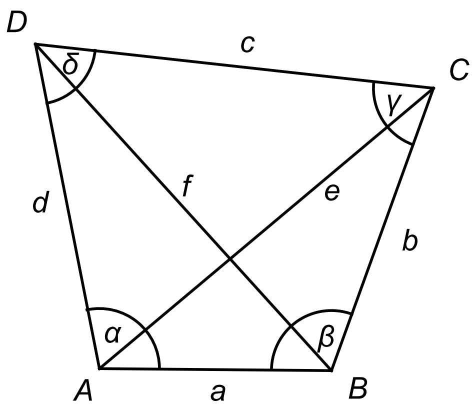
Mgr. Barbora Šťastná
Přírodovědecká fakulta Masarykovy University
e-mail: stastna@mail.muni.cz

Abstrakt

Při řešení mnoha úloh v euklidovské geometrii se využívá velmi dobře známá kosinová věta udávající vztah mezi délkami stran a velikostí vnitřního úhlu v trojúhelníku. Také ve čtyřúhelníku však existují zajímavé a jednoduché vztahy mezi jednotlivými prvky (délkami stran a úhlopříček, velikostmi vnitřních úhlů). Tento článek se zabývá tzv. „kosinovou větou pro čtyřúhelník“ a dalšími vztahy v obecném čtyřúhelníku, jejich důkazy a vzájemnými souvislostmi.

1 Úvod

Chceme-li se zabývat vztahy mezi prvky čtyřúhelníka v euklidovské geometrii, je nejprve nutné shodnout se na použitém značení. Je-li dán čtyřúhelník $ABCD$ (viz obr. 1), je obvyklé značit velikosti jeho stran písmeny a, b, c, d, velikost úhlopříčky AC písmenem e a velikost úhlopříčky BD písmenem f. Řecká písmena α, β, γ, δ značí velikosti vnitřních úhlů (tyto úhly mohou být nekonvexní), velké písmeno S obsah čtyřúhelníka a malé písmeno s polovinu obvodu čtyřúhelníka ($s = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$).



Obrázek 1: Označení prvků ve čtyřúhelníku

Tvrzení zmiňovaná v článku je možné najít v různých učebnicích a sbírkách úloh pod různými názvy. Všechny uvedené důkazy jsou původní, často však pro svoji jednoduchost jsou jinde uvedeny ve velmi podobném znění.

2 Obsah čtyřúhelníka

Pro libovolný čtyřúhelník $ABCD$ platí

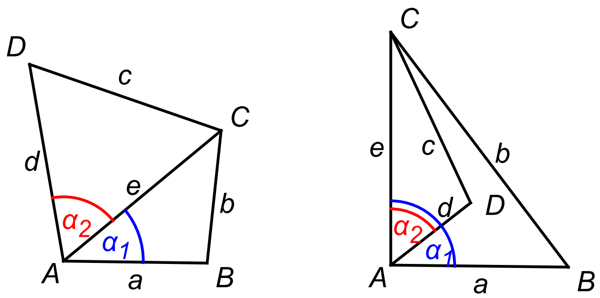
$$(4S)^2 = 4e^2f^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2. \tag{1}$$

Důkaz

Označme nejprve $\alpha_1 = |\sphericalangle BAC|$, $\alpha_2 = |\sphericalangle CAD|$ (vždy konvexní, viz obr. 2). Využijeme platnosti kosinové věty postupně v $\triangle ABC$, $\triangle ACD$, $\triangle ABD$:

$$b^2 = e^2 + a^2 - 2ea\cos\alpha_1 \tag{2}$$
$$c^2 = e^2 + d^2 - 2ed\cos\alpha_2 \tag{3}$$
$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos(\alpha_1 \pm \alpha_2) \tag{4}$$

V poslední rovnosti znaménko plus odpovídá případu, kdy vnitřní úhly u vrcholů B a D



Obrázek 2: K důkazu tvrzení (1)

čtyřúhelníka jsou oba konvexní, znaménko mínus je využito, je-li jeden z těchto úhlů nekonvexní. Dosaďme nyní do pravé strany dokazované rovnosti za b^2, c^2, f^2 ze vztahů (2), (3) a (4) a upravme:

$$\begin{aligned}
&4e^2f^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 = \\
&= 4e^2(a^2 + d^2 - 2ad\cos(\alpha_1 \pm \alpha_2)) - (-e^2 + 2ea\cos\alpha_1 + e^2 - 2ed\cos\alpha_2)^2 = \\
&= 4e^2(a^2 + d^2 - 2ad\cos(\alpha_1 \pm \alpha_2) - (a\cos\alpha_1 + d\cos\alpha_2)^2) = \\
&= 4e^2(a^2 + d^2 - 2ad\cos(\alpha_1 \pm \alpha_2) - a^2\cos^2\alpha_1 - d^2\cos^2\alpha_2 + 2ad\cos\alpha_1\cos\alpha_2) = \\
&= 4e^2(a^2(1 - \cos^2\alpha_1) + d^2(1 - \cos^2\alpha_2) - 2ad\cos(\alpha_1 \pm \alpha_2) + 2ad\cos\alpha_1\cos\alpha_2) = \\
&= 4e^2(a^2\sin^2\alpha_1 + d^2\sin^2\alpha_2 \pm 2ad\sin\alpha_1\sin\alpha_2) = \\
&= 4e^2(a\sin\alpha_1 \pm d\sin\alpha_2)^2 = \\
&= 16(\frac{1}{2}ea\sin\alpha_1 \pm \frac{1}{2}ed\sin\alpha_2)^2 = \\
&= (4S)^2
\end{aligned}$$

V průběhu úprav je použit součtový vzorec pro funkci kosinus, v předposledním řádku se v závorce vyskytuje součet resp. rozdíl obsahů trojúhelníků ABC a ACD, což při uvedeném použití znaménka plus resp. mínus dává obsah čtyřúhelníka $ABCD$.

3 Brahmaguptův vzorec

Pro libovolný čtyřúhelník $ABCD$ platí

$$S \leq \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

rovnost nastává právě pro tětivový čtyřúhelník.[1]

Zobecnění

Pro libovolný čtyřúhelník $ABCD$ platí

$$S^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right). \tag{5}$$

Souvislosti

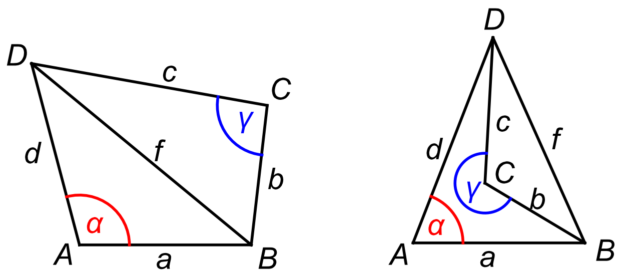
Z uvedeného vztahu plyne, že čtyřúhelník s největším obsahem při zadaných délkách stran je čtyřúhelník tětivový.

Důkaz

Máme-li určit obsah čtyřúhelníka, je vhodné vyjádřit jej jako součet resp. rozdíl obsahů trojúhelníků ABD a BCD (viz obr. 3):

$$S = \left|\frac{1}{2}ad\sin\alpha + \frac{1}{2}bc\sin\gamma\right| \tag{6}$$

Absolutní hodnota je v uvedeném vztahu nutná, neboť α a γ značí velikosti vnitřních úhlů



Obrázek 3: K důkazu tvrzení (5)

ve čtyřúhelníku, a tyto úhly mohou být nekonvexní. Sinus nekonvexního úhlu je záporný, což odpovídá odečtení obsahů uvedených trojúhelníků. Pokračujme dále umocněním obou stran rovnosti na druhou a podobnými úpravami jako v předchozím důkazu („goniometrická jednička“, součtový vzorec pro funkci kosinus, navíc vzorec pro kosinus dvojnásobného úhlu).

$$\begin{aligned}
S^2 &= \frac{a^2d^2}{4}\sin^2\alpha + \frac{b^2c^2}{4}\sin^2\gamma + \frac{abcd}{2}\sin\alpha\sin\gamma = \\
&= \frac{a^2d^2}{4}(1-\cos^2\alpha) + \frac{b^2c^2}{4}(1-\cos^2\gamma) + \frac{abcd}{2}(\cos\alpha\cos\gamma - \cos(\alpha+\gamma)) = \\
&= \frac{a^2d^2}{4} + \frac{b^2c^2}{4} - \frac{a^2d^2}{4}\cos^2\alpha - \frac{b^2c^2}{4}\cos^2\gamma + \frac{abcd}{2}\cos\alpha\cos\gamma - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) + \frac{abcd}{2} = \\
&= \frac{1}{4}(ad+bc)^2 - \frac{1}{4}(ad\cos\alpha - bc\cos\gamma)^2 - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)
\end{aligned}$$

[1] Brahmagupta (598–670), indický matematik a astronom. Více o Brahmaguptovi viz např. [1], [2], více o uvedených vztazích viz např. [3], [4] a [5].

Použijeme-li nyní pro vyjádření výrazů $ad\cos\alpha$ a $bc\cos\gamma$ kosinovou větu v $\triangle ABD$ a $\triangle BCD$

$$\begin{aligned} f^2 &= a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha, \\ f^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma, \end{aligned}$$

dostáváme postupnými úpravami

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{4}(ad+bc)^2 - \frac{1}{4}(ad\cos\alpha - bc\cos\gamma)^2 - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{4}(ad+bc)^2 - \frac{1}{16}(a^2+d^2-f^2-b^2-c^2+f^2)^2 - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{16}(4(ad+bc)^2 - (a^2+d^2-b^2-c^2)^2) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{16}(2ad+2ac-a^2-d^2+b^2+c^2)(2ad+2ac+a^2+d^2-b^2-c^2) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{16}((b+c)^2-(a-d)^2)((a+d)^2-(b-c)^2) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{16}(b+c-a+d)(b+c+a-d)(a+d-b+c)(a+d+b-c) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) = \\ &= (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) \end{aligned}$$

4 Kosinová věta pro čtyřúhelník (Bretschneiderova věta)

Pro libovolný čtyřúhelník $ABCD$ platí[2]

$$e^2f^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(\alpha+\gamma).$$

Důkaz

Porovnáním dříve uvedených vztahů (1) a (5) pro obsah čtyřúhelníka s využitím úpravy vztahu (5) na tvar $S^2 = \frac{1}{4}(a^2c^2+b^2d^2) - \frac{1}{16}(a^2+d^2-b^2-c^2)^2 - \frac{abcd}{2}\cos(\alpha+\gamma)$.

Souvislosti

Pro zajímavost je možné kosinovou větu pro čtyřúhelník zapsat v podobě kosinové věty pro trojúhelník o stranách ef, ac, bd a vnitřním úhlu $\alpha+\gamma$:

$$(ef)^2 = (ac)^2 + (bd)^2 - 2(ac)(bd)\cos(\alpha+\gamma).$$

Takový trojúhelník skutečně lze sestrojit elementárními postupy z daného čtyřúhelníka.

5 Ptolemaiova nerovnost

V libovolném čtyřúhelníku platí

$$ef \le ac + bd$$

rovnost nastává právě pro tětivový čtyřúhelník.[3]

[2] Carl Anton Bretschneider (1808–1878), německý gymnaziální profesor. Více viz např. [6].

[3] Klaudios Ptolemaios (asi 85–165), řecký astronom, matematik, fyzik a zeměpisec. Více o Ptolemaiovi viz např. [7], více o ptolemaiově nerovnosti viz např. [8] a [9].

Důkaz

Důkaz této důležité nerovnosti je snadný, využijeme-li již dokázanou kosinovou větu pro čtyřúhelník. Postupnými úpravami dostáváme:

$$
\begin{aligned}
e^2f^2 &= a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(\alpha+\gamma)\\
e^2f^2 &= a^2c^2 + b^2d^2 - 4abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) + 2abcd\\
e^2f^2 &= (ac+bd)^2 - 4abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\\
e^2f^2 &\le (ac+bd)^2\\
ef &\le ac+bd
\end{aligned}
$$

6 Závěr

Mnoho úloh v euklidovské geometrii požaduje nalezení vztahů mezi zadanými parametry trojúhelníků a obecně mnohoúhelníků. Některé z nich jsou složité a brzy upadnou v zapomnění, některé však svojí jednoduchostí udivily nejednoho matematika. Cílem tohoto článku bylo shrnout zajímavé vztahy pro obecný čtyřúhelník, podat jejich důkazy a provázat je vzájemnými souvislostmi.

Reference

[1] *Brahmagupta*. Wikipedia.
http://en.wikipedia.org/wiki/Brahmagupta, 20. 9. 2006.

[2] J. J. O'Connor, E. F. Robertson. *Brahmagupta biography*. School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland.
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Brahmagupta.html, listopad 2000.

[3] *Brahmagupta's formula*. Wikipedia.
http://en.wikipedia.org/wiki/Brahmagupta%27s_formula, 3. 8. 2006.

[4] Weisstein, Eric W. *Brahmagupta's Formula*. From MathWorld–A Wolfram Web Resource.
http://mathworld.wolfram.com/BrahmaguptasFormula.html, 12. 3. 2004.

[5] Weisstein, Eric W. *Bretschneider's Formula*. From MathWorld–A Wolfram Web Resource.
http://mathworld.wolfram.com/BretschneidersFormula.html, 6. 3. 2004.

[6] Gérard P. Michon. *Practical Formulas*. Numericana.
http://home.att.net/ numericana/answer/formula.htm, 19. 8. 2006.

[7] *Ptolemy*. Wikipedia.
http://en.wikipedia.org/wiki/Ptolemy, 19. 9. 2006.

[8] P. Leischner. Ptolemaiova věta. *MFI*, **15**: 129-135, 2005/2006.

[9] P. Leischner. Ptolemaiova nerovnost. *MFI*, **15**: 385-392, 2005/2006.