Počátky matematické analýzy ve středoškolských učebnicích

Zdeňka Hencová

Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Katedra matematiky

e-mail: 22519@mail.muni.cz

1 Snahy o reformu středoškolské matematiky

Vznik matematické analýzy jako partie matematiky bychom mohli datovat do 17. století, kdy (jak je všeobecně známo) byly Newtonem a Leibnizem položeny základy diferenciálního a integrálního počtu. Poznamenejme, že posledně jmenovaný se kromě již zmíněného mocného matematického aparátu věnoval i dalšímu pojmu, který tvoří základ této matematické disciplíny - funkce. Tématu se věnoval také J. Bernoulli, který je prvním autorem definice tohoto pojmu. Matematikové pracovali samozřejmě s funkcemi již mnohem dříve, teprve v této době však došli k prvnímu pokusu o přesné vymezení tohoto pojmu. Na toto dílo navázal Leonhard Euler, který vyslovil přesnější definici pojmu funkce a především zavádí symbol $f(x)$ pro zápis funkční závislosti. Tím byl dán život nové části matematické vědy.

Přestože matematická analýza vznikla v průběhu 17. a 18. století, je pochopitelné, že zpočátku nebyla přístupná širokému okruhu matematiků. Nejprve byla pěstována jen malým okruhem nadaných zasvěcenců a teprve postupně pronikla do širších matematicky vzdělaných vrstev.

Velmi záhy se však ukázala mocnost vzniklého aparátu, který umožnil řešit dosud nemyslitelné. Díky svým fyzikálním aplikacím měl také velké praktické použití. A tak není divu, že již v 19. století se objevily pokusy o začlenění této disciplíny do výuky matematiky na středních školách. Šlo sice o snahy jednotlivců, přesto jim postupně začalo být nakloněno i všeobecné mínění. Přestože musela matematická analýza bojovat o své "místo na slunci matematické vědy" s po staletí uznávanou a upřednostňovanou geometrií a navíc šlo o látku poměrně náročnou, dařilo se jí to poměrně záhy.

Obecně můžeme konstatovat, že sledujeme-li vývoj od Exner-Bonitzova programu z roku 1849, pak až do Marchetovy reformy v roce 1908 bychom z témat spadajících do matematické analýzy ve školních osnovách nalezli pouze téma aritmetických posloupností a řad. Přitom tyto pojmy nebyly přesně vymezeny, termín řada byl užíván pro označení posloupnosti i řady.

Přestože k obsahové změně ve výuce středoškolské matematiky došlo až díky již zmíněné Marchetově reformě, první podněty se objevily již o půl století dříve. Jejich nejvýznamnějším iniciátorem byl německý matematik Felix Klein (1849–1925), který pociťoval potřebu více provázat učivo matematiky mezi jednotlivými ročníky i typy škol. Usiloval také o to, aby se úroveň středoškolského vzdělání pozdvihla na vyšší stupeň, reflektovala nově získané matematické poznatky a umožnila tak snazší přechod absolventů na vysoké školy technického směru. Klein byl v prosazování svých myšlenek úspěšný. Z jeho popudu (kterým byla přednáška *Zur Frage des höheren matematischen Unterrichts* na prvním mezinárodním kongresu matematiků v Curychu roku 1897) došlo v roce 1900 v Paříži na druhém mezinárodním kongresu k ustanovení mezinárodní sekce pro vyučování matematice.

Otázka didaktiky a obsahu středoškolské matematiky byla jedním z ústředních témat také třetího mezinárodního kongresu matematiků v Heidelbergu roku 1904. Reflektovala tak dění v evropských zemích, kde od roku 1900 rostla snaha o změny středoškolské matematiky. Ve Francii a Anglii byly do středoškolského učiva zařazovány některé poznatky o funkcích a také základy diferenciálního a integrálního počtu. Z mimoevropských zemí zmiňme podobné snahy také v USA.

Na mezinárodní úrovni pak bylo nejaktivnější Německo. Zde byla v roce 1904 na shromáždění německých přírodovědců ve Vratislavi ustanovena komise pro vyučování matematice a přírodovědným předmětům. Ta na základě Kleinova podnětu vytvořila návrh na úpravu přírodovědného, zejména však matematického vzdělání. Tento návrh byl diskutován a posléze také přijat na shromáždění německých matematiků v roce 1905 v Meranu a je znám jako meranský program. Jeho důležitost pro výuku matematické analýzy spočívala nejen v posílení postavení matematiky v rámci přírodních věd, ale zejména v snaze o začlenění problematiky funkcí do středoškolského učiva.

Důsledkem uvedeného programu byl návrh změn obsahu středoškolského učiva matematiky. Jednalo se právě zejména o partie spadající do matematické analýzy - pojem funkce, problematika elementárních funkcí a základy diferenciálního a integrálního počtu. Uvedené změny byly doplněny na shromáždění německých přírodovědců v Drážďanech (1907) didaktickou složkou, v níž byl důraz kladen na vytvoření uceleného, logicky navzájem propojeného systému vědomostí. Daný program byl uveden o rok později zkušebně do praxe.

Jak již bylo řečeno, snahy o změnu didaktiky matematiky a začlenění nových partií (včetně analýzy) do středoškolské matematiky se objevily v jednotlivých zemích již na přelomu 19. a 20. století. Výjimkou nebyly ani české země, které tehdy byly součástí Rakouska-Uherska. Přesto se již v 60. letech 19. století objevila potřeba českých středoškolských učebnic a snaha o jejich tvorbu.

Prvními autory takovýchto učebnic byli Václav Jandečka a především Václav Šimerka působící část života na gymnáziu v Českých Budějovicích. Ten předložil ke schválení školským úřadům učebnici algebry [1], v jejímž dodatku byl také jakýsi úvod k diferenciálnímu a integrálnímu počtu. K zařazení diferenciálního a integrálního počtu do učebnice se autor vyjádřil již v předmluvě. Uvádí, že se pro tento krok rozhodl

> *" . . . dle rady některých z mých vědeckých přátel a maje za to, že čas nynější toho požaduje,. . . "*

Autor také uvedl, že se v recenzích na rukopis své knihy setkal s podporou, ale i s kritikou svého "průkopnického pokusu" o zpřístupnění problematiky diferenciálního a integrálního počtu. Šimerka byl o zajímavosti a potřebnosti zmíněného počtu natolik přesvědčen, že původně zamýšlel zařadit jej jako součást samotné učebnice. V reakci na zmíněné kritiky, které upozorňovaly zejména na přetěžování studentů, a na odmítavý postoj ministerstva se Šimerka nakonec rozhodl článek vydat pouze jako přídavek k již zmíněné algebře. Tento dodatek byl určen zvídavějším žákům, kteří by se chtěli s problematikou seznámit. Přestože v době vydání této knihy ještě vysoké ministerstvo, které rozhodovalo o náplni školního plánu, nebylo myšlence uvedení dané problematiky na střední školu nakloněno, je tento počin jasným důkazem, že se toto téma zdálo některým kantorům zajímavé a ve vhodném pojetí přístupné i žákům středních škol.

Učebnice byla publikována v roce 1863 (přídavek samostatně o rok později), tedy mnohem dříve, než se matematikové začali koncepčně zabývat myšlenkou zařazení diferenciálního a integrálního počtu do středoškolských osnov.

Dokladem přesvědčení českých matematiků o důležitosti začlenění diferenciálního a integrálního počtu do středoškolského učiva jsou tzv. Pražské návrhy (Prager Vorschläge) pronesené na 9. německo-rakouském středoškolském dnu 9. dubna 1906 ve Vídni školním radou Karlem Zahradníčkem. Ty byly součástí přednášky "K otázce infinitesimálního počtu na rakouské střední škole", v níž Zahradníček obhajoval důležitost infinitezimálního počtu jako matematického nástroje, který má bohaté uplatnění také ve fyzice.

Velkou roli v tvorbě a vydávání učebnic u nás hrála zejména Jednota českých matematiků a fyziků, působící od roku 1862. Protože velkou část její členské základny tvořili právě středoškolští profesoři matematiky, je přirozené, že se Jednota od svého vzniku orientovala právě na výuku matematiky a činnost středoškolských profesorů. Cílem Jednoty bylo pozvednout úroveň matematiky v českých zemích a dostihnout tak přední evropské země, což se jí dařilo (ve 20. letech 20. století byla u nás situace lepší než v Německu). Jedním z prostředků zvyšování úrovně matematické vzdělanosti byla účast Jednoty na tvorbě učebnic. V tomto ohledu byl pro naše země podstatný rok 1850, kdy byla zrušením privileje studijního fondu dána možnost vydávat středoškolské učebnice libovolné instituci, případně autorovi. Jedinou podmínkou bylo schválení zmíněné učebnice ministerstvem kultu a vyučování. Odborníci na didaktiku matematiky z řad Jednoty věnovali této činnosti velkou pozornost, uvádí se, že v roce 1911 tvořily středoškolské učebnice asi 1/3 veškeré publicistické tvorby. Kromě učebnic byly vydávány také sbírky úloh, matematické tabulky a jiné pomocné knihy. U všech publikací byl důraz kladen především na odbornost daného učebního textu, ale také na metodiku výkladu.

K začlenění matematické analýzy do středoškolských učebnic přispěla také situace v našem školství. Úřady reagovaly velmi rychle na již zmíněný meranský program, v roce 1909 bylo Marchetovou reformou zařazeno do středoškolských osnov učivo o elementárních funkcích a základy diferenciálního a integrálního počtu.

Z prvních učebnic, které svým obsahem odpovídaly upraveným osnovám, jmenujme především knihy Bohumila Bydžovského, které měly nahradit učební materiály Emanuela Taftla a Františka Honzy, používané od 80. let 19. století. Právě Bydžovský byl vybrán Jednotou, aby začlenil do učebnic novou problematiku zahrnující i prvky matematické analýzy. V autorově pedagogickém díle tak najdeme jak téma funkcí, tak diferenciálního a integrálního počtu, konkrétně v učebnicích:

Aritmetika pro VI. až VII. třídu gymnasií a reálných gymnasií (1911),
Aritmetika pro nejvyšší třídu gymnasií a reálných gymnasií (1912).

Již z názvu těchto učebnic je patrné, že matematická analýza se do středoškolských učebnic nedostávala jako samostatný tématický celek, ale jako součást algebry nebo geometrie. Její prvky (zejména diferenciální a integrální počet) byly začleňovány k oběma sférám matematiky - algebře i geometrii. Autorem, který se věnoval druhé z obou disciplín, přičemž do své učebnice zařazoval diferenciální a integrální počet, byl například Jan Vojtěch s učebním textem *Geometrie pro VII. třídu reálek (1912).* V jejím závěru nalezneme samostatně zpracované téma s názvem "Začátky počtu infinitesimálního".

Kromě uvedených učebnic vydávají oba autoři (Bydžovský a Vojtěch) společně ještě sbírku *Sbírka úloh z matematiky (1924),* která měla být doplňujícím textem k procvičení učiva. Témat, která bychom mohli začlenit do matematické analýzy, zde mnoho nenajdeme. Kromě úloh na posloupnosti nalezneme ve sbírce příklady na jednotlivé typy funkcí. V závěru sbírky je pak jedna dvoustrana věnovaná také úlohám z diferenciálního a integrálního počtu. Na závěr uveďme alespoň jednoho autora věnujícího se naší problematice, který nepůsobil pod záštitou Jednoty. Byl jím Josef Vinš, v jehož učebnici *Geometrie pro sedmou třídu reálek a pro sedmou a osmou třídu ref. reálných gymnasií (1942)* najdeme také partie věnované diferenciálnímu a integrálnímu počtu.

2 Václav Šimerka - Algebra čili počtářství obecné pro vyšší gymnasia

Podívejme se teď podrobněji na učebnici Václava Šimerky *Algebra čili počtářství obecné pro vyšší gymnasia,* konkrétně na partie, které bychom mohli zařadit do matematické analýzy. Jde o téma posloupností, řad a pojmu funkce, zpracované v kapitole *XVII. Řady.* Uvedený název je pro současného čtenáře matoucí. Pod pojmem řada rozumí Šimerka někdy řadu, někdy posloupnost (v dnešním pojetí). Protože tehdy nebyly funkce zaváděny jako zobrazení, nemohly tak být definovány ani posloupnosti. V "definici" tohoto pojmu uvádí:

> *Řada (series) vůbec jest více čísel po sobě jdoucích, jež jistým pravidlem souvisí.*

Používá ale i slovo posloupnost, mluví-li o aritmetické či geometrické posloupnosti.

Terminologie spojená s řadami a posloupnostmi odpovídá přibližně dnešní. Najdeme zde pojmy člen řady, obecný (n-tý) člen; místo označení "index" byl užíván termín "ukazovatel". Podle počtu členů posloupnosti jsou rozeznávány posloupnosti "konečné a nekonečné"; podobně jako dnes jsou posloupnosti rozlišovány podle růstu (respektive poklesu) hodnot členů ("posloupnosti vstupující a padající").

V dalších kapitolách, které se věnují aritmetické (počtářské) a geometrické (měřické) posloupnosti, volí Šimerka výklad obdobný dnešnímu. Posloupnosti zavádí a popisuje vztahem pro n-tý člen. Narozdíl od současných osnov však pojem posloupnosti dále rozšiřuje, v dnešní terminologii ze zobrazení $\mathbb{N} \to A$ na zobrazení $\mathbb{Z} \to A$, kde A je libovolná číselná množina. Setkáme se zde proto například s "minus třetím" členem.

Posléze provádí Šimerka rozšíření na $\mathbb{Q} \to A$, čehož docílí vsouváním nových členů mezi dané, a tedy volbou racionálního indexu $n = \frac{m}{p}$. Autor uvádí, že je nutno si místo jednoho členu představit členů p, a tedy mezi původní dva po sobě následující členy vždy $p - 1$ nových členů vložit. Jako příklad uvádí "řadu" $7, 19, 31, 43$. Mezi její členy se mají vložit vždy dva členy, index potom nabývá hodnot $1, 1\frac{1}{3}, 1\frac{2}{3}, 2, 2\frac{1}{3}, \ldots$.

Dále nalezneme u Šimerky také partii věnovanou aritmetickým řadám vyšších řádů. Autor nejprve seznamuje studenty s pojmy stálé a proměnné veličiny, tato označení se posléze objevují i v "definici" pojmu funkce. Bezprostředně následuje dodefinování pojmu funkce aritmetická, jenž odpovídá dnešnímu pojmu polynomická funkce. Opět je třeba podotknout, že se nejedná (z dnešního pohledu) o přesnou matematickou formulaci pojmu. Píše:

Výraz, v němž stálé a proměnné veličiny přicházejí, nazývá se úkon čili funkce veličin těchto, kteráž aritmetickou slove, pakli proměnné veličiny pouze co kořen mocnosti kterés tu přicházejí, jako $M = an^2 + bn + c$ neb $N = gt^3 + htu^2$, kdež první jednu proměnnou n, druhá pak dvě totiž t, u má. Aritmetické funkce rozeznáváme jako rovnice dle nejvyšší mocnosti, v níž se veličina proměnná nachází, ve stupně; z uvedených funkcí jest tedy M druhého, N pak třetího stupně.

V dalším výkladu uvažuje Šimerka již pouze aritmetické funkce s jednou proměnnou libovolného stupně. Formuluje tvrzení, že každá tato aritmetická funkce m–tého řádu dává postupně vzniknout dalším m "rozdílovým řadám", než se dostane k posloupnosti nulové. Přitom "rozdílovou řadu" z dané řady získáme, odečteme-li v posloupnosti každý člen od členu následujícího. Další aplikací zmíněného tvrzení je úloha ze znalosti prvních členů "řady" a počtu jejích "rozdílových řad" určit vzorec pro obecný člen.

V závěru jsou studenti seznámeni se způsobem, jakým lze sečíst příslušný počet členů aritmetické posloupnosti vyššího stupně. K procvičení pak vybírá autor úlohy, na nichž je vidět orientace na geometrii. Jde o určení:

- počtu dělových koulí, které tvoří pravidelný čtyřstěn, je-li hrana tvořena n koulemi
- počtu dělových koulí, které tvoří pravidelný čtyřboký jehlan, je-li hrana podstavy tvořena n koulemi
- počtu dělových koulí vytvářejících hromadu tvaru čtyřbokého jehlanu s podstavou obdélníka o $m \times n$ koulích
- čísel pěti- (resp. šesti-)úhelníkových .

Z tématu geometrické posloupnosti zmiňme snad jen několik zajímavých slovních úloh: Achilles a želva, odměna pro vynálezce hry šachy, určení součtu všech dělitelů daného čísla a jiné.

3 Přídavek k Algebře pro vyšší gymnasia

Tato partie Šimerkovy učebnice (lépe řečeno její doplněk) - věnovaná diferenciálnímu a integrálnímu počtu - je rozdělena do šesti částí, jejichž názvy uveďme v původním znění:

I.	Differencialy daných úkonů.
II.	Proměňování úkonů v řady.
III.	Úkony trigonometrické.
IV.	Taylorova poučka a její následky.
V.	Základy počtu integrálného.
VI.	Upotřebení počtu nekonečného v geometrii.

Šimerkovo pojetí diferenciálního a integrálního počtu se značně liší od dnešního, a to jak svým rozsahem, tak i obsahem. V části věnující se diferenciálnímu počtu nenajdeme pojmy spojitosti ani limity, které nám diferenciální počet neodmyslitelně evokuje. Celá problematika je probírána pouze náznakově, se zaměřením na praktické použití. Jednotlivé pojmy nejsou přesně definovány, výklad je veden pouze v intuitivní rovině. Za účelem jednoduchosti pracuje autor pouze se spojitými funkcemi (nespojitost uvažuje na jediném místě textu v souvislosti s neurčitými výrazy). Za předpokladu spojitosti (který ovšem neuvádí) jsou Šimerkou zformulovaná tvrzení platná. Autor se zaměřuje na vyložení základních poznatků a postupů, které lze uplatnit při řešení matematických úloh. Jeho cílem je žáky naučit aplikovat matematiku v praktických úlohách. Teoretické zázemí uvádí jen v míře potřebné pro vytvoření představy o pojmech, které jsou nutné pro praktické úlohy. Demonstrujme si tyto rysy Šimerkovy učebnice na konkrétních pasážích a ukažme si některé její zajímavosti.

Autor hned v úvodu zavádí pojem diferenciálu funkce. Tím však nemůžeme chápat jeho přesnou definici, jde spíše o vytvoření jakési intuitivní představy. Nutno podotknout, že způsob výkladu tohoto pojmu a jeho aplikací připomene znalcům historie matematiky práci s nekonečně malou veličinou z doby vzniku diferenciálního počtu.

Diferenciálem je tedy u Šimerky rozuměna

> *nesmírně čili nekonečně malá část, o niž spojitou proměnnou veličinu (x, y, z, atd.) růsti necháme, jmenuje se differencial (lišné, rozčinek) veličiny této, a znamená písmenem δ před veličinu onu postavenou ($\delta x, \delta y, \delta z$ atd.).*

Dále Šimerka uvádí:

> *Differencialy jsou tedy veličiny nalézající se mezi nullou a nejmenšími zlomky, jaké kdy v praktickém počtu přicházejí.*

Jako motivační a ilustrační příklad zvolil Šimerka práci s logaritmickými deskami, konkrétně píše:

> *Obyčejně počítáme nejvýš v 7mi neb 8mi cifrách, pro které i logaritmické desky upraveny jsou: představují-li tedy x, y třeba i celá 10ticifrová čísla, zvětší se sice x, pakli k němu*
>
> $$\frac{y}{10^m}$$
>
> *(kdež m as sto neb ještě více jest) přičteme, a zmenší, pakli zlomek ten odejmeme, ale změna ta jest tak malá, že se logaritmických desk ani netýká, a proto se též vždy místo*
>
> $$x \pm \frac{y}{10^m}$$
>
> *čili $x \pm \delta y$ pouze x bráti může. Kdyby se*
>
> $$\delta y = \frac{y}{10^m}$$
>
> *při $m = 100$ velikým zdálo, vezme se m větší, tedy δy ještě menší.*

Na takto intuitivně chápaném pojmu autor dále buduje teorii diferenciálů. Nejprve předkládá jakási "pravidla pro užití diferenciálů". Dozvíme se tak, že jsou-li diferenciály přičteny ke konečným veličinám (respektive od nich odečteny), mizí. Dále mizí také diferenciály vyšších mocností, jsou-li přičteny k diferenciálům nižších mocností (respektive od nich odečteny). Například

$$g(\delta x)^2 + h(\delta x)^3 = (\delta x)^2(g + h\delta x) = g(\delta x)^2.$$

Analogické pravidlo platí i pro součiny více diferenciálů.

Na příkladu funkce $f(x) = a + bx$ Šimerka vyvozuje, že "veličiny stálé" nemají diferenciál a že při diferencování je možné konstanty vytknout před diferenciál. Následuje odvození pravidel pro diferencování součtu, součinu dvou, respektive více funkcí a podílu (označeného zde termínem *zlomek*) funkcí. Postup je vždy stejný:

> *... tedy $\delta y = f(x + \delta x) - y$ čili $\delta fx = f(x + \delta x) - fx$;*
> *differencial funkce každé nalezneme tedy, když od změněné funkce původní úkon odejmeme.*

Po lineární funkci se autor zaměřil na diferenciál funkce x^n. Úlohu převádí na výpočet diferenciálu součtu n stejných činitelů. Tak odvozuje formuli pro n přirozené. Posléze ukazuje, že vzorec lze uplatnit i pro n záporné, respektive racionální.

Zajímavý je způsob určení diferenciálu funkce logaritmus a exponenciální funkce s obecným základem. Protože Šimerka nedefinuje pojem limity funkce ani derivace, nemůže je pro vyvození diferenciálu logaritmu použít. Pokládá proto

$$\delta \log x = fx.\delta x,$$

kde fx je neznámá funkce. Do rovnice dosadí za proměnnou x výraz x^n, tedy

$$\delta \log x^n = f(x^n)\delta(x^n).$$

Po úpravě

$$n\delta \log x = nx^{n-1}f(x^n)\delta x.$$

Dosazením dostaneme

$$xfx = x^n f(x^n).$$

Položíme-li $a = x^n, A = afa$, dostaneme:

$$fx = \frac{A}{x}, \delta \log x = \frac{A\delta x}{x}.$$

Pro $A = 1$ nazývá Šimerka logaritmus přirozeným. Na základě diferenciálu přirozeného logaritmu odvozuje autor diferenciál δa^x. Položíme $a^x = y$ a po zlogaritmování dostáváme

$$x \ln a = \ln y,$$

$$\ln a\delta x = \frac{\delta y}{y}.$$

Po úpravě

$$\delta a^x = \ln a a^x \delta x.$$

Po dosazení $a = e$ dostaneme δe^x.

V závěru kapitoly se Šimerka zabývá diferenciály vyšších řádů.

Kapitola 2 s názvem Proměňování úkonů v řady se věnuje rozvíjení funkcí do řad. Autor opět začíná velmi formálně nepřesným a nekonkrétním konstatováním:

> *Mnohé úkony proměnné x dají se naznačiti řadou dle mocnosti z x vystupující, totiž*
> $$fx = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \dots A_rx^r,$$
> *kdež $A_0, A_1, A_2, A_3 \dots A_r$ stálé, posud však neznámé veličiny jsou.*

Má-li tento rozvoj platit obecně, musí platit i pro $x = 0$. Z tohoto zjišťuje autor hodnotu koeficientu A_0. Hodnoty dalších konstant získává pak postupným diferencováním a dosazováním zmíněné hodnoty 0 za x. Na závěr konstatuje, že postup je možno provést pouze za předpokladu, že příslušné podíly diferenciálů nenabývají nekonečných hodnot. Toto tvrzení je opět nepřesné. Je zde sice formulován vztah, není však jasné, pro které funkce jej lze použít.

Konečného rozvoje funkce $f(x) = (a + x)^n$ pro $n \in \mathbf{N}$ do řady užívá autor také k nalezení souvislosti s binomickou větou.

Zajímavá je u Šimerky kapitola Úkony trigonometrické, v níž se věnuje goniometrickým funkcím. Protože se dosud studenti setkali se sinem a kosinem pouze v trigonometrii (jako s poměrem délek stran pravoúhlého trojúhelníka), nebyli seznámeni s faktem, že jsou to funkce. Dalším problémem, před kterým autor stojí, je získání derivací těchto funkcí. Protože (jak již bylo řečeno) nezavádí pojem limity, nemůže derivace získat nám známým způsobem. Z tohoto důvodu také nezískává rozvoj těchto funkcí pouhou aplikací Mac-Laurinovy věty. Vychází z rozvoje funkce e^x získaného v předchozí partii. Za exponent x zde dosazuje ryze imaginární výraz ix. V rozvoji této funkce odděluje část reálnou a imaginární, část reálnou označuje $\mathrm{Cos}\, x$, imaginární $\mathrm{Sin}\, x$. V průběhu prvních tří paragrafů této kapitoly se potom autor snaží dokázat, že se jedná o goniometrické funkce $\sin x$ a $\cos x$. Zjišťuje sudost, respektive lichost těchto funkcí, odvozuje vzorec pro goniometrickou jedničku. S pojmy sudosti, respektive lichosti funkce se zde však samozřejmě nesetkáme. Autor hovoří o změně znaménka, vezmeme-li x záporné. Určuje také obor hodnot funkcí. Z uvedeného vzorce pro funkci e^x (respektive e^y) získává výrazy pro Sin (případně Cos) součtu a rozdílu dvou hodnot. Na závěr pro několik zvolených případů ukazuje, že tyto funkce nabývají stejných hodnot jako funkce trigonometrické. Na základě těchto zjištění dochází k závěru, že lze tyto funkce ztotožnit se sinem a kosinem známým z goniometrie. Vztahy pro derivace funkcí

$$\delta \sin x = \cos x \delta x,$$

$$\delta \cos x = -\sin x \delta x$$

pak získává porovnáním rozvojových řad obou funkcí.

Celý postup na nás může působit značně těžkopádně. Jde sice o postup logicky pochopitelný, ovšem závěrečné porovnání několika hodnot sinu (respektive kosinu) s hodnotami funkce Sin (Cos) je snadno napadnutelné. Daný postup může navíc vytvářet ve středoškolských studentech představu funkcí sinus a kosinus jako příslušných řad, což není příliš názorné. V případě absence limity je to ale na středoškolské úrovni postup elegantní.

V rámci této kapitoly se studenti setkávají i s dalšími goniometrickými funkcemi - $\mathrm{tg}\, x, \mathrm{cotg}\, x$, ale i $\sec x$ a $\mathrm{cosec}\, x$.

Podrobně se Šimerka zabývá nejprve funkcí $\mathrm{tg}\, x$. Řadu funkce $\mathrm{tg}\, x$ získává jako výsledek dělení řad funkcí $\sin x$ a $\cos x$. Velmi zvláštní je u Šimerky také již zmíněný pojem funkce. Např. funkce tangens je zde definována opět jako funkce spojitá (jde o vyjádření pouze jedné větve této funkce). Autor zde (pravděpodobně záměrně) zcela zamlčuje studentům periodicitu funkcí.

Dále se Šimerka zmiňuje i o funkcích, které dnes nazýváme cyklometrické. Odvozuje i některé vztahy například $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, a dokonce i vzorce pro diferenciály těchto funkcí.

Dalším dokladem formulace tvrzení bez vymezení podmínek platnosti je věta v kapitole 4 vedoucí k Taylorově poučce:

Každou funkci proměnné x můžeme naznačit rovnicí

$$fx = Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots..$$

Tvrzení neplatí ani pro všechny spojité funkce.

Autor do zmíněného vyjádření funkce dosadí za x výraz $x + h$. Jednotlivé dvojčleny pak rozvine dle binomické věty. Po přeskupení členů lze funkci $f(x)$ zapsat ve tvaru

$$f(x+h) = f(x) + hf^1(x) + \frac{h^2}{2} f^2(x) + \frac{h^3}{3!} f^3(x) + \ldots,$$

což je Taylorova poučka, k níž chce autor dojít.

V rámci této kapitoly je vysvětlován princip l´Hospitalova pravidla (název se však v učebnici nevyskytuje). Zajímavá je Šimerkova formulace tohoto tvrzení. Autor nemá potřebný aparát pro zápis tohoto tvrzení ani jeho důkaz, píše:

Je-li

$$\frac{fx}{\varphi x}$$

dáno, což při $x = a$ ve

$$\frac{fa}{\varphi a} = \frac{0}{0}$$

přechází, jest $\frac{0}{0}$ veličina neurčitá; bychom ji nalezli, vyhledejme $f^1x, \varphi^1 x$ a bude

$$\frac{fa}{\varphi a} = \frac{f^1 a}{\varphi^1 a};$$

pakliby ale i tu $f^1 a = \varphi^1 a = 0$ se stalo, určeme dále $f^2 x, \varphi^2 x$, kdež se potom $\frac{fa}{\varphi a} = \frac{f^2 a}{\varphi^2 a}$ neboli $= \frac{f^3 a}{\varphi^3 a}$ atd. objeví.

Toto tvrzení se Šimerka snaží dokázat na základě Taylorovy poučky. Zde ovšem naraží na výše zmíněný problém absence definice limity. Autor uvažuje takto: funkce $f(x + h)$ a $\varphi(x + h)$ rozvine do řady dle Taylorovy poučky. Při $x = a$ platí podle předpokladu $f(a) = \varphi(a) = 0$. Ve zlomku pak $\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}$ lze rozvoje obou funkcí zkrátit číslem h. Dostaneme tak výraz

$$\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \frac{f^1(a) + \frac{1}{2}hf^2(a) + \frac{1}{3!}h^2 f^3(a) + \ldots}{\varphi^1(a) + \frac{1}{2}h\varphi^2(a) + \frac{1}{3!}h^2\varphi^3(a) \ldots}.$$

Dále pak autor pokládá $h = 0$ a na základě tohoto kroku dospívá k dokazovanému tvrzení. Jsou-li funkce $f^1(a)$ a $\varphi^1(a)$ nulové, celou úvahu opakuje. Analogicky postupuje až po první nenulový jmenovatel.

I když my v tomto postupu vytušíme Šimerkův intuitivní "limitní přechod", středoškolští studenti mohli být ze zmíněného postupu poněkud zmateni. Vždyť v jednom kroku dělíme číslem h a vzápětí ho pokládáme rovno nule! Řada žáků byla pravděpodobně schopna přijmout skutečnost, že výraz $\frac{0}{0}$ má smysl a jakousi konečnou hodnotu, jen málo z nich však asi pochopí analogický "limitní přechod" u daného čísla h. Formulace h je zanedbatelně malé by na tomto místě byla asi vhodnější.

Šimerka také ukazuje, jak uplatnit dané pravidlo v případě, že podílem funkčních hodnot daných funkcí získáme výraz $\frac{\infty}{\infty}$. Ten převádí na předchozí typ úlohy.

Zmiňme se ještě krátce o integrálním počtu, tomu je v učebnici věnována pouze jedna kapitola. Autor chápe integrování jen jako operaci inverzní k hledání diferenciálu dané funkce (přestože v dalším textu využije integrál k výpočtu obsahu rovinných obrazců). Píše:

> *Uvádění veličin nekonečně malých čili úkonů differencialných na konečné nazývá se integrováním (celením), a protož jsou differencování a integrování výkony protivné.*

Na základě toho odvozuje některé vlastnosti integrálů a integrály základních funkcí, vychází přitom ze znalostí získaných při zavádění diferenciálu.

Jako zajímavost uveďme, že Šimerka dokonce dospívá i k pravidlu per partes, které nazývá *počástným integrováním*, a to při integraci funkce

$$\int \delta x \sqrt{a^2 - x^2} = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 \delta x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Popisuje také metodu rozkladu integrované funkce na parciální zlomky (podotkněme, že jde o speciální typ funkce, ne obecný postup). Jde o integrál:

$$\int \frac{x^2 \delta x}{(x^2 - 1)^2}.$$

Šimerka ve svém textu nerozlišuje integrály neurčité a určité, avšak při výpočtu obsahů rovinných obrazců ke značce $\int$ připisuje meze integrace. Používá tak samozřejmě Newton-Leibnizovu formuli, přitom výběr jedné meze motivuje tím, aby se (soudobě řečeno) z množiny všech primitivních funkcí vybrala jedna konkrétní, výběr druhé meze pak tím, aby se z této funkce stala hodnota (číslo).

Tato učebnice v jistém smyslu předběhla dobu, jedná se o ojedinělý pokus zpracování problematiky diferenciálního a integrálního počtu na středoškolské úrovni.

Reference

[1] Šimerka, V.: Algebra čili počtářství obecné pro vyšší gymnasia. Dr. E. Grégr, Praha 1863.

[2] Potůček, J.: Vývoj vyučování matematice na českých středních školách v období 1900 - 1945. Pedagogické centrum Plzeň, Plzeň 1998.

[3] Bydžovský, B.: Arithmetika pro VI. až VII. třídu gymnasií a reálných gymnasií. Jednota českých mathematiků, Praha 1911.

[4] Bydžovský, B., Vojtěch, J.: Sbírka úloh z matematiky. Jednota československých matematiků a fysiků, Praha 1924.

[5] Bydžovský, B., Vojtěch, J.: Arithmetika pro nejvyšší třídu gymnasií a reálných gymnasií. Jednota českých mathematiků, Praha 1912.

[6] Vojtěch, J.: Geometrie pro VII. třídu reálek. Jednota českých mathematiků, Praha 1912.

[7] Vinš, J.: Geometrie pro sedmou třídu reálek a pro sedmou a osmou třídu ref. reálných gymnasií. Česká grafická unie a.s. Prag, Praha 1942.