

# Jordanova křivka a její využití

Lukáš Dvořák

*Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně*

*Technická 2, Brno 616 69*

*e-mail: hoopoo@centrum.cz*

## Abstrakt

Tato práce pojednává o digitální topologii, konkrétně o zpracování digitálních obrazů. Protože tyto obrazy nejsou spojité, musíme řešit následující definice: jak spolu souvisejí sousední body, čím je definovaná křivka a jaké problémy se díky diskrétnímu prostoru objevují. Jako jeden z hlavních pojmů se v digitální topologii objevuje Jordanova křivka. Za pomoci Jordanovy křivky lze například dosáhnout velké úspory místa při ukládání obrazů v počítači.

## 1 Úvod

Pojem digitální topologie byl zaveden pro potřeby studia geometrických a topologických vlastností digitálních obrazů. Digitální topologie pojednává o vlastnostech diskrétních obrazových matic (polí) ve dvou a více rozměrech. Poskytuje teoretické základy pro řešení problémů zpracování obrazů, jako je rozpoznávání objektů, vyplňování obrysů, snímání obrysů, ztenčování a rozšiřování obrazů, skeletonizace atd. Uplatnění nachází také při řešení problému úspory paměti při ukládání obrazu v počítači.

Přes svůj název je tradiční přístup k této problematice založen více na teorii grafů než na samotné topologii. Zde se budu zabývat zpracováním dvourozměrných digitálních obrazů, které se v praxi vyskytují nejčastěji. Obrazy jsou tvořeny body - pixely, ke kterým je přiřazena nějaká barva. Např. černobílé obrazy jsou tvořeny černými body (obvykle značíme jako 1) a bílými body (většinou značeny jako 0). V aplikacích se nejčastěji používají 2-dimenzionální, případně 3-dimenzionální obrazy, jsou však možné i vícedimenzionální obrazy. Ty se užívají například pro záznam pohybu trojrozměrného objektu v čase. Všechny zde prezentované výsledky lze přirozenou cestou rozšířit i na vícedimenzionální prostory.

Hlavním problémem digitální topologie je aplikování pojmů náležících spojitému prostoru do prostoru diskrétního, digitálního. V práci bude nejdříve definována přilehlost bodů, souvislost množiny a Jordanova křivka. S jejím využitím je ukázána úspora paměti při ukládání obrazů v počítači za pomoci detekce hran obrazů.

## 2 Přilehlost v rovině $\mathbb{Z}^2$ a Jordanova křivka

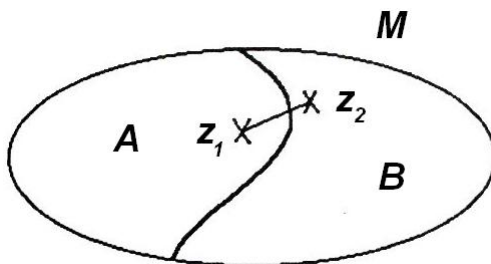
Při práci s digitálními obrazy musíme především respektovat to, že obraz není spojitý. Co byla v reálné rovině spojitá množina, to se zde jeví jako skupina osamocených bodů. Důsledkem toho je, že základní geometrické či topologické vlastnosti nelze volně převést do digitální roviny. Cílem práce je definovat základní topologické vlastnosti pomocí binárních relací. Důvod je celkem prostý. Binární relace jsou jednoduše programovatelné a snáze ověřitelné.

Základem práce s diskrétním prostorem je snaha o jeho „zespojiténí“, neboli určení, které body jsou přilehlé, jak se pozná spojitá množina, jak lze v diskrétním prostoru definovat křivku a jak s ní dále pracovat. Zavedeme tedy nejdříve relaci přilehlosti.

**Definice:** Binární relace  $R$  na množině  $M$  se nazývá přilehlost, jestliže  $R$  je ireflexivní a symetrická. Pokud pro  $x, y \in M$  platí  $xRy$ , říkáme, že body  $x$  a  $y$  jsou přilehlé.

**Definice:** Nechť  $M$  je množina, na které je definovaná relace přilehlosti  $R$ . Říkáme, že množina  $M$  je souvislá vzhledem k  $R$ , jestliže pro libovolný její rozklad  $M = A \cup B$ , kde  $A \neq \emptyset$ ,  $B \neq \emptyset$  a  $A \cap B = \emptyset$ , existují body  $z_1 \in A$ ,  $z_2 \in B$ , které jsou přilehlé.

Maximální souvislá množina vzhledem k  $R$  se nazývá komponenta množiny  $M$  vzhledem k relaci  $R$ . Je-li  $M$  jedinou svojí komponentou, pak říkáme, že  $M$  je souvislá vzhledem k  $R$ .



**Definice:** Nechť  $R$  je relace přilehlosti na množině  $M$ . Jednoduchá křivka v  $M$  vzhledem k  $R$  je konečná posloupnost různých bodů  $p_0, p_1, \dots, p_n \in M$  taková, že každý bod  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) má právě 2 přilehlé body  $p_{i-1}$  a  $p_{i+1}$ . Body  $p_0$  a  $p_n$  nazýváme koncové body. Jednoduchá uzavřená křivka v  $M$  vzhledem k  $R$  je taková jednoduchá křivka, kde body  $p_0$  a  $p_n$  jsou přilehlé, tj. každý z bodů  $p_0, p_1, \dots, p_n$  má právě 2 přilehlé body.

Lze dokázat, že množina  $M$  je souvislá, právě když její libovolné dva různé body lze spojit jednoduchou křivkou, tvořenou body  $M$ .

**Věta:** Množina  $M$  je souvislá, jestliže libovolné dva její různé body lze spojit jednoduchou křivkou, tvořenou body  $M$ .

**Důkaz:** Zvolme dva libovolné body množiny  $a, b \in M$ . Množinu všech bodů, které jsou přilehlé k bodu  $a$ , označíme jako  $P_1$ . Dle definice je množina  $P_1$  souvislá. Pokud množina  $P_1$  neobsahuje bod  $b$ , sestrojíme množinu všech bodů z  $M$  přilehlých ke všem bodům množiny  $P_1$ . Tuto množinu označíme jako  $P_2$ ,  $P_1 \subseteq P_2 \subseteq M$ . Množina  $P_2$  je souvislá. Postup opakujeme, dokud množina  $P_n$  neobsahuje bod  $b$ . Získali jsme tedy posloupnost souvislých množin  $P_1 \subseteq P_2 \subseteq \dots \subseteq P_n \subseteq M$ . Lze sestroit posloupnost bodů  $a, p_1 \in P_1, p_2 \in P_2, \dots, b = p_n \in P_n$ . Protože jsme body  $a$  a  $b$  zvolili náhodně, pro každou takovou dvojici můžeme sestroit danou posloupnost bodů, neboli křivku, a množina  $M$  je tedy souvislá.  $\square$

Důležitým pojmem v digitální topologii je tzv. Jordanova křivka. Její definice velice usnadní práci s digitálními obrazy, např. při rozpoznávání obrazů, obrysů objektů apod.

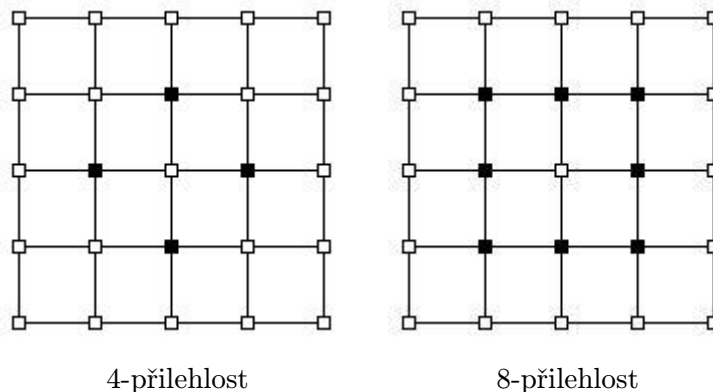
**Definice:** Nechť  $J$  je jednoduchá uzavřená křivka v množině  $M$  vzhledem k nějaké přilehlosti  $R$ . Pokud je množina  $M \setminus J$  tvořena právě dvěma komponentami vzhledem ke zúžení relace  $R$  na  $M \setminus J$ , říkáme, že  $J$  je Jordanova křivka vzhledem k  $R$ .

**Poznámka:** Předchozí definice je analogií definice Jordanovy křivky v reálné rovině  $\mathbb{R}^2$ . V reálné rovině platí, že pokud vyjmeme jednoduchou uzavřenou křivku  $C$  z roviny  $\mathbb{R}^2$ , tvoří  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  právě dvě komponenty.

V rovině  $\mathbb{Z}^2$  se dá definovat několik typů přilehlostí, hlavní je ale 4-přilehlost a 8-přilehlost.

**Definice:** Nechť  $K$  je relace přilehlosti v rovině  $\mathbb{Z}^2$ . Řekneme, že relace  $K$  je 4-přilehlost, jestliže ke každému bodu  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  jsou přilehlé právě čtyři body  $(x-1, y)$ ,  $(x, y-1)$ ,  $(x, y+1)$  a  $(x+1, y)$ .

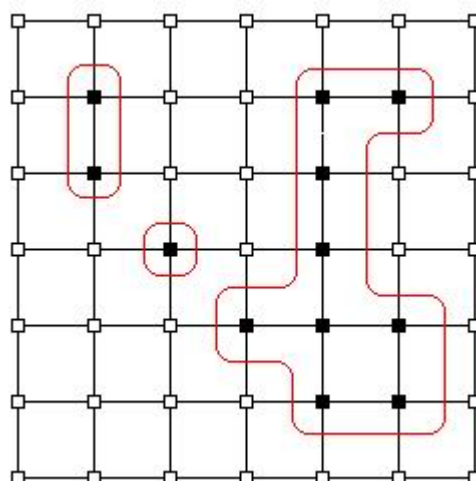
Řekneme, že relace  $K$  je relace 8-přilehlosti, jestliže ke každému bodu  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  existuje právě 8 přilehlých bodů  $(x-1, y-1)$ ,  $(x-1, y)$ ,  $(x-1, y+1)$ ,  $(x, y-1)$ ,  $(x, y+1)$ ,  $(x+1, y-1)$ ,  $(x+1, y)$  a  $(x+1, y+1)$ .



Pokud v rovině  $\mathbb{Z}^2$  definujeme křivku, musíme specifikovat, jakou přilehlost používáme.

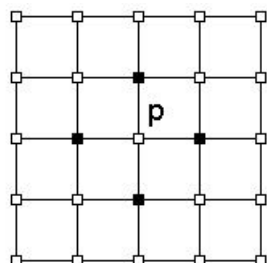
**Definice:** Nechť  $R$  je relace  $k$ -přilehlosti na  $\mathbb{Z}^2$ ,  $k \in \{4, 8\}$ . Potom jednoduchou  $k$ -křivkou, resp. jednoduchou uzavřenou  $k$ -křivkou, resp.  $k$ -komponentou (v  $\mathbb{Z}^2$ ) rozumíme jednoduchou křivku, resp. jednoduchou uzavřenou křivku, resp. komponentu (v  $\mathbb{Z}^2$ ) vzhledem ke  $k$ -přilehlosti.

Pro různý stupeň přilehlosti  $k$  se  $k$ -komponenty obecně liší, viz. následující obrázek.

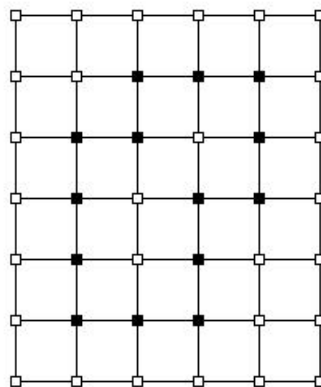


Na obrázku je skupina černých bodů obklopena bílými. Pokud budeme uvažovat  $k = 8$ , tvoří černé body jednu 8-komponentu. Pokud ale zvolíme  $k = 4$ , dostaneme tři 4-komponenty - na obrázku jsou zakroužkované.

Uvažujme nyní analogii Jordanovy křivky v rovině  $\mathbb{Z}^2$  za použití  $k$ -přilehlosti,  $k \in \{4, 8\}$ . Pokud je  $J$   $k$ -křivka, měla by rozdělit rovinu na dvě  $k$ -komponenty. To bohužel neplatí. Rozebereme situaci zvlášť pro  $k = 4$  a pro  $k = 8$ .



Obr. 1.



Obr. 2.

Nejdříve uvažujme 8-přilehlost a situaci na obrázku 1. Černé body zde tvoří křivku s 8-přilehlostí. Tato křivka by měla rozdělit rovinu  $\mathbb{Z}^2$  na dvě 8-komponenty, tj. oblasti, ve kterých lze každé dva body spojit 8-křivkou bodů, které v této oblasti leží. Z obrázku je ale zřejmé, že zde vznikne pouze jedna 8-komponenta, bílý bod  $p$  je po diagonálách 8-přilehlý k okolním bílým bodům. Můžeme si ale všimnout, že bílé body tvoří dvě 4-komponenty. Při užití 4-přilehlosti na bílé body je bod  $p$  osamocený, čili tvoří triviální 4-komponentu, a ostatní bílé body tvoří druhou 4-komponentu.

Uvažujme nyní 4-přilehlost pro černé body, čili budeme mít 4-křivku - viz. obrázek 2. Černé body jsou 4-přilehlé, čili tvoří jednoduchou 4-křivku. Podívejme se na bílé body. Pokud budeme uvažovat 4-přilehlost pro bílé body, máme zde 3 komponenty. Body obklopené černou křivkou jsou od sebe odděleny a tvoří tedy dvě samostatné 4-komponenty. Dohromady tedy bílé body tvoří tři 4-komponenty. Použijme nyní pro bílé body 8-přilehlost. V tomto případě jsou bílé body uvnitř černé křivky 8-přilehlé a tvoří jednu komponentu, druhá je tvořena bílými body vně křivky.

**Věta:** (Analogie Jordanovy věty v  $\mathbb{Z}^2$ ) Nechť  $J$  je jednoduchá uzavřená  $k$ -křivka,  $k \in \{4, 8\}$ , mající minimálně  $(12 - k)$  bodů. Potom  $\mathbb{Z}^2 \setminus J$  má právě dvě  $(12 - k)$ -komponenty.

**Poznámka:** Minimální počet bodů křivky  $J$  vzhledem k dané  $k$ -přilehlosti je dán požadavky na jednoduchost křivky. Pokud zvolíme 4-přilehlost, pak nejmenší možná křivka má 4 body. Tato křivka ale nemá žádný vnitřní bod. Nejmenší 4-křivka mající alespoň 1 vnitřní bod má 8 bodů. Obdobně je tomu u 8-přilehlost. Nejmenší možná křivka má 3 body, ale také neobsahuje žádný vnitřní bod. To splňuje jednoduchá křivka, která má 4 body.

Nyní jsme definovali křivku v digitální rovině a popsali problémy s paradoxy přilehlosti. Můžeme tedy znalosti o digitální křivce využít při ukládání obrazů v počítači.

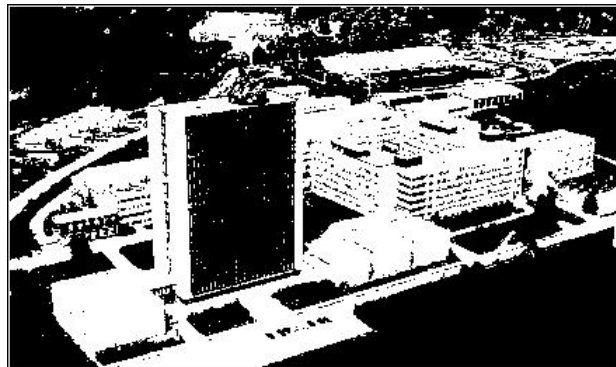
### 3 Úspora paměti při ukládání obrazu v počítači

Využití znalosti Jordanovy křivky lze demonstrovat například při ukládání digitálních obrazů v počítači. Uvažujme pouze černobílé obrazy konečné velikosti. Jednotlivé prvky obrazu nazýváme obrazové pixely. Pokud budeme důslední, u každého pixelu uložíme informaci o jeho barvě. Lze jednoduše určit, kolik místa nám takováto operace zabere. Stačí vynásobit počet řádků a počet sloupců velikostí informace o barvě a přidat další znaky, jako uvození souboru, dělicí symboly apod.

Snadno ale můžeme velikost ukládaných informací zmenšit. Nejdříve provedeme analýzu obrazu. Zjistíme, jaká barva je na pozadí, a detekujeme jednotlivé objekty. Každý samostatný objekt tvoří jednu komponentu. Hranicí takové komponenty je uzavřená křivka. Při přechodu této hranice se vždy mění barva. Nyní stačí uložit informaci o barvě pozadí a o hranici. Pokud obraz rekonstruujeme, budeme vykreslovat jednotlivé pixely například po řádcích. Jestliže narazíme na hranici, okamžitě změníme barvu. Situace je jednoduchá u černobílých obrazů, kde se vždy změní barva z černé na bílou a naopak.

Jako příklad uvedu několik obrazů. Budu porovnávat velikost souborů dvou formátů. První formát ukládá informace o každém pixelu. Protože používám pouze 2 barvy, jeden symbol určuje barvu a další je oddělovací znaménko. Druhý formát ukládá informace o obrysech objektů. Po řádcích se prochází obrázek a pokud se narazí na změnu barvy, automaticky se uloží pozice změny.

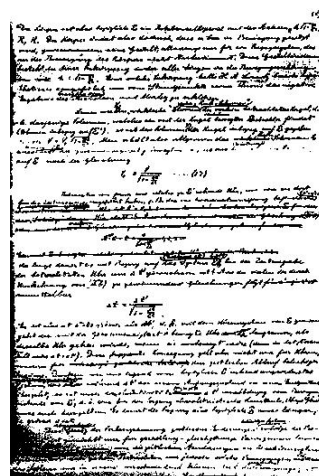
Uvedené obrázky jsou převedeny do černobílé podoby. První jsou budovy Fakulty strojního inženýrství, dále obrázek Alberta Einsteina a nakonec kopie stránky Einsteinova rukopisu. Tento rukopis hovoří o speciální teorii relativity; Einstein jej začal psát v Praze v roce 1912 pro Handbuch der Radiologie.



VUT FSI



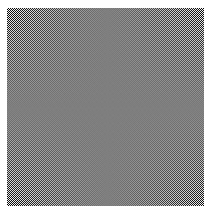
Albert Einstein



Rukopis

Název	VUT FSI	Albert Einstein	Rukopis
Rozměry v pixelech	440 × 260	350 × 453	350 × 540
Počet znaků při plném formátu	228808	317108	378008
Počet znaků při ukládání hranic	24394	31203	61436

Z tabulky celkem jasně vyplývají výhody hledání komponent. Praktičtější je ukládat pouze okraje objektů namísto plné informace. Rozdíl velikosti formátů u prvních dvou obrázků je přibližně desetinásobný, u rukopisu jde přibližně o šestinásobek. Neplatí to ale vždy. Podívejme se na extrémní případ, kdy je obrázek tvořen podobně jako šachovnice a sousední pixely mají rozdílné barvy.



Tento zdánlivě šedý obrázek je šachovnicový obrázek o velikosti 200×200. Každé dva sousední pixely mají jinou barvu. Plný formát má velikost 80008 znaků a formát hranic má dokonce 138200 symbolů. Tady metoda hledání hranic selže.

Nelze tedy obecně říci, že ukládání pouze hranice objektů vždy sníží velikost výsledného souboru u jakéhokoli obrázku. Pokud je obrázek příliš diferencovaný, nemusí být tento postup nejvhodnější.

## Literatura

- [1] Eckhardt. U., Latecka. L. J.: Topologies for the digital spaces  $\mathbb{Z}^2$  and  $\mathbb{Z}^3$ , Computer Vision and Image Understanding 90, 295-312 (2003)
- [2] Kong, T. Y., Kopperman, R., Meyer P. R., A Topological Approach to Digital Topology, American Mathematical Monthly Vol. 98, No. 10, 901-917 (1991)
- [3] Kong, T. Y., Rosenfeld, A.: Digital Topology: Introduction and Survey, Computer Vision, Graphics, and Image Processing 48, 357-393 (1989)
- [4] Marchand-Maillet, S., Sharaiha, Y.M.: Binary digital Image Processing, Academic Press (2000)
- [5] Rosenfeld, A.: Digital Topology, American Mathematical Monthly Vol. 86, 612-630 (1979)
- [6] Šlapal, J.: An alternative digital topology, Electronic Notes in Discrete Mathematics Vol 12 (2003)
- [7] Šlapal, J.: Digital Jordan curves, Elsevier Science (2004)