Matematické modelování úloh stavební praxe při výuce matematiky

František Bubeník
ČVUT Praha, Fakulta stavební, Katedra matematiky
e-mail: bubenik@mat.fsv.cvut.cz

Abstrakt

Příspěvek se zabývá problematikou aplikačních úloh, se kterými se student setká v profilových předmětech na stavební fakultě ČVUT Praha, jejich zařazováním, matematickým modelováním a řešením v základních kurzech matematiky.

1. Úvod

Cílů základních kurzů matematických předmětů na technických vysokých školách je více, ale jedním z pilotních cílů matematiky je skutečnost, že je základem pro navazující odborné předměty podle studijního programu a specializace studia. Matematika sama jako předmět vede k exaktnímu uvažování, vyvozování logicky správných závěrů na základě daných předpokladů, ale studium (jak matematiky, tak navazujících předmětů) je efektivnější a úspěšnost vyšší, jestliže do matematických úloh je implementován i technický podklad.

Například matematická úloha najít funkce $Q = Q(x)$ a $M = M(x)$ na jistém intervalu <0,L>, pro které platí

$$Q'(x) = -f(x), M'(x) = Q(x)$$

a které splňují například homogenní podmínky $Q(0) = 0, M(0) = 0$, popisuje průběh vnitřních sil na konzole délky $L > 0$, s intenzitou zatížení určenou funkcí *f,* kdy volný konec konzoly není zatížen žádnou osamělou silou nebo osamělým momentem. Úlohy tohoto typu patří k základním úlohám, které nemůže minout žádný budoucí kvalitní statik na studijním programu stavební inženýrství. Tato problematika je diskutována v práci [1] autora. V tomto příspěvku se budeme zabývat jiným přístupem k problémově orientovaným úlohám v předmětu matematika.

2. Aplikace vedoucí na okrajové úlohy

Úlohy na průhyb nosníků jsou jedněmi ze standardních úloh v předmětech stavební mechaniky na studijním programu stavební inženýrství a vedou k řešení okrajových úloh. Pro ohýbané nosníky je možno vztah mezi průhybem *u* a intenzitou zatížení *f* nosníku kladné délky *L* vyjádřit rovnicí

$$EIu^{(4)}(x) = f(x), \tag{1}$$

kde *EI* je tzv. ohybová tuhost průřezu (jde o součin Youngova modulu *E* a momentu setrvačnosti průřezové plochy *I*). Jsou-li oba konce nosníku vetknuté, požadujeme v krajních bodech splnění podmínek

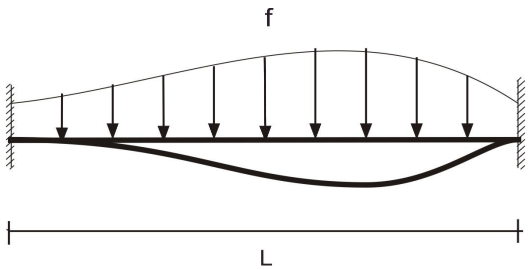
$$u(0) = 0, u'(0) = 0, u(L) = 0, u'(L) = 0. \tag{2}$$

V předmětech zabývajících se pevností, pružností a plasticitou se student dozví, že platí rovnost tzv. virtuální práce vnitřních a vnějších sil, která lze interpretovat rovností

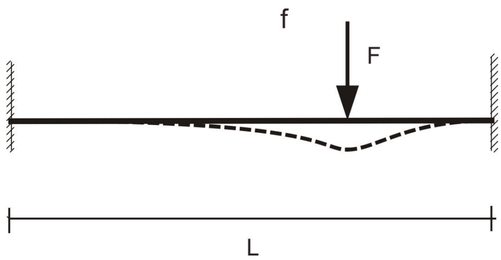
$$\int_0^L EIu''(x)v''(x)dx = \int_0^L f(x)v(x)dx, \tag{3}$$

kde *v* je libovolná funkce spojitá až do druhé derivace *v''* na příslušném intervalu a splňující okrajové podmínky (2). Rovnost (3) se také odvozuje v matematice jako cvičení na metody výpočtu určitých integrálů a dostane se jednoduchým použitím dvakrát metody per partes.

Je-li zatížení vyjádřeno spojitou funkcí *f*, znázorněné například na obr. 1, student může najít řešení rovnice (1), případně splňující podmínky (2), i když, jak zjistí, ne obecně každá okrajová úloha musí mít řešení. Tedy může najít funkci *u*, která splňuje rovnici (1) v každém bodě daného intervalu a okrajové podmínky (2).



Obr. 1. Spojité zatížení f



Obr. 2. Osamělá síla F

Ve stavební praxi je běžná situace, že zatížení je realizováno osamělou silou *F* v nějakém bodě, jak je znázorněno na obr. 2 (případně osamělými silami ve dvou nebo více bodech). V tom případě se student při řešení rovnice (1) klasickou metodou dostane do problému. Přitom zkušenost a logická úvaha mu naznačuje, že k jakémusi průhybu dojít může.

Rovnost (3) poskytuje náběh na jiný typ řešení, tzv. slabé řešení. K tomu je ovšem potřeba studenty seznámit s dalšími pojmy, jako je funkcionál, minimum funkcionálu na jisté množině funkcí, funkcionální prostory, speciálně Sobolevovy, základy metody konečných prvků apod. Není cílem tohoto příspěvku řešit na tomto místě uvedené úlohy. Rovinná úloha tohoto typu pro vetknutou desku a biharmonickou rovnici je analyzována a řešena v [2].

3. Úloha matematiky

Matematika jako základ pro navazující odborné předměty, aby se stala účinným pomocníkem pro studenty při řešení problematiky stavební praxe, by se měla dále ubírat cestou zařazování problémově orientovaných úloh, analýzou matematických modelů a metodami jejich řešení. Konkrétní technický význam jednotlivých pojmů, veličin a konstant se pak student dozví v příslušných profilových předmětech a bude disponovat kvalitní matematickou přípravou.

Literatura

[1] F. Bubeník. Matematika a matematika pro stavební inženýry. *Sborník z 29. konference VŠTEZ*: 29-30. UTB Zlín. 4.-8. září Mutěnice. 2006.

[2] I. Marek. Numerické řešení problému průhybu desky: Některé principy matematického modelování a jejich počítačových realizací. *Sborník z 29. konference VŠTEZ*: 127-136. UTB Zlín. 4.-8. září Mutěnice. 2006.