Numerické řešení některých okrajových úloh s biharmonickou rovnicí *

Ivo Marek †

Numerické řešení okrajových úloh vyšších řádů založené na variačních formulacích lze realizovat pomocí jednak přímých jednak smíšených formulací. Rozhodnutí, kterou možnost zvolit pro počítačovou realizaci záleží na možnostech dostupného softwaru. Aplikace přirozených variačních principů však vyžaduje použití bazí zvýšené hladkosti, tedy pro úlohy 4. řádu nutnost použití bazí s prvky globální hladkosti alespoň $\mathcal{C}^1$. Tato skutečnost je natolik omezující, že vede ke snaze nalézt vhodnější alternativy pro výpočet, který by bylo lze realizovat pomocí softwaru založeném na používání bazí s globální hladkostí $\mathcal{C}^0$. Jedna z takových alternativ je předmětem této studie. Výklad je založen na pionýrských pracích [4], [3]. Metody sledující tytéž cíle, založené však na zcela odlišných principech a modelech, jsou popsány v [2].

Vycházíme z klasického modelu desky ve formulaci pomocí biharmonické rovnice s odpovídajícími okrajovými podmínkami.

Je tedy dána oblast $\Omega \subset \mathcal{R}^d, d = 2$. Na této oblasti vyšetřujeme úlohu

$$\Delta^2 u = f \text{ v } \Omega \tag{0.1}$$

s okrajovými podmínkami

$$u = 0 = \frac{\partial u}{\partial \nu} \text{ na } \partial\Omega \tag{0.2}$$

neboli, ve slabé formulaci

0.1 Problém

Najít $u \in H_0^2(\Omega)$ takové, aby platily vztahy

$$J(u) = \min \left\{ J(v) : v \in H_0^2(\Omega) \right\}, \tag{0.3}$$

při čemž

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\Delta v|^2 - \int_\Omega f v \quad , \quad v \in H_0^2(\Omega). \tag{0.4}$$

*V'yzkumná činnost, jejímž výsledkem je tato pr'ace, byla podporována grantem 201/02/0595 Grantové agencury České republiky a grantem CEZ MSM 6840770010 ministerstva šolství, mládeže a tělovýchovy ČR.

†Czech Institute of Technology, School of Civil Engineering, Thákurova 7, 166 29 Praha 6, Czech Republic (marek@ms.mff.cuni.cz).

Naší snahou je úlohu (0.1)-(0.2) převést na posloupnost úloh pro rovnici (0.1) s okrajovými podmínkami

$$u = 0 = \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} \quad \text{na } \partial\Omega. \tag{0.5}$$

Jak je bezprostředně patrné, úloha (0.1) s okrajovými podmínkami (0.5) se redukuje na úlohu řešit dvě Poissonovy úlohy s patřičnými okrajovými podmínkami. Jak ukážeme, tyto dvě úlohy se však dají realizovat na počítači pomocí snadno dostupného softwarového vybavení.

Tato skutečnost umožňuje faktorizaci Problému 1 na postupné řešení úloh Poissonových, tedy úloh 2. řádu. Můžeme totiž interpretovat funkci ϕ jakožto aproximaci či reprezentaci pro $-\Delta u$.

Není asi namístě zdůrazňovat, že formulavaná úloha patří mezi základní a přitom velice frekventované úlohy v rámci studia matematiky a mechaniky na stav ebních fakultách. Přesto, počítačové řešení není dosud na mnoha školách softwarově náležitě zajištěno. Cílem našeho sdělení je připomenout existenci poměrně "levného" a velice efektivního řešení uvedeného problému.

Fundamentální teoretické výsledky z dnes již klasických prací [4] a [3] byly upraveny na základě soudobých poznatků výpočtové matematiky a vytvořen adekvátní softwarový produkt [6]. Současně probíhají experimenty, které potvrzují očekávané kvality diskutovaných metod. Výsledky experimentů budou pečlivě vyhodnoceny a publikovány. Dá se očekávat, že tyto metody se stanou součástí softwarových soustav praktického užití, tedy nejen výzkumnou prací. Otázkou zůstává, proč uvedeného přístupu nebylo využito praktiky již v minulosti. V rámci teorie byly myšlenky navržené v [4] dále rozvíjeny, na př. v [5]

Citovaná literatura

[1] Bittnar Z., Šejnoha J. *Numerické metody mechaniky 1.* Vydavatelství ČVUT, Praha 1992.

[2] Bittnar Z., Šejnoha J. *Numerické metody mechaniky 2.* Vydavatelství ČVUT, Praha 1992.

[3] Ciarlet P.G. *The Finite Element Method for Elliptic Problems.* SIAM, Philadelphia 2002.

[4] Ciarlet P.G., Glowinski R. *Dual iterative techniques for solving a finite element approximation of the biharmonic equation.* Computer methods in Applied Mechanics and Engineering **5** (1975) 277 - 295.

[5] Hlaváček I. *A mixed finite element method for plate bending with a unilateral obstacle.* Appl. Math. **39**, 25-44 (1994).

[6] Mayer P. *Výpočtové experimenty s deskou.* Výzkumná zpráva K101.05.01. Praha 2005.