

Konstrukce obecného řešení systému dvou diskrétních rovnic metodou vlastních vektorů

JOSEF DIBLÍK, JAROSLAV KLIMEK

V tomto příspěvku popíšeme konstrukci obecného řešení soustavy dvou diskrétních rovnic pomocí vlastních vektorů. Nechť je dána soustava lineárních diferenčních rovnic s konstantními koeficienty

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n), \quad (1)$$

kde $\mathbf{A}$ je reálná čtvercová matice řádu 2 a $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$ je hledaný vektor řešení, který závisí na proměnné n , tj. $\mathbf{x} = \mathbf{x}(n)$, $n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{Z}$. Předpokládáme, že netriviální řešení $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ soustavy (1) má tvar

$$\mathbf{x} = \mathbf{v}\lambda^n, \quad (2)$$

kde λ je vhodné reálné číslo a $\mathbf{v}$ je vhodný konstantní vektor. Dosadíme-li tvar (2) do soustavy (1) a soustavu upravíme, dostaneme

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (3)$$

kde $\mathbf{I}$ je čtvercová jednotková matice rozměru 2×2 a $\mathbf{0}$ je nulový vektor. Systém (3) již neobsahuje nezávislou proměnnou n a je lineární algebraickou soustavou rovnic vzhledem ke složkám vektoru $\mathbf{v}$. Kořeny charakteristické rovnice

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \quad (4)$$

nazýváme vlastními čísly matice $\mathbf{A}$. Pokud je $\lambda = \lambda^*$ vlastním číslem matice $\mathbf{A}$ a vektor $\mathbf{v} = \mathbf{v}^*$ je nenulovým řešením soustavy $(\mathbf{A} - \lambda^*\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$, pak nazýváme vektor $\mathbf{v}^*$ vlastním vektorem matice $\mathbf{A}$. Vektorová funkce $\mathbf{x} = \mathbf{v}^*(\lambda^*)^n$ je jedním z řešení soustavy (1).

V případě, že charakteristická rovnice (4) má dva navzájem různé reálné kořeny λ_1, λ_2 a dva odpovídající (nenulové) vlastní vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, je konstrukce obecného řešení soustavy rovnic (1) jednoduchá. Dvě vektorové funkce $\mathbf{v}_1\lambda_1^n, \mathbf{v}_2\lambda_2^n$ tvoří fundamentální systém řešení soustavy rovnic (1). Obecné řešení této soustavy lze vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{x}(n) = K_1\mathbf{v}_1\lambda_1^n + K_2\mathbf{v}_2\lambda_2^n,$$

kde K_1, K_2 jsou libovolné konstanty.

Konstrukce fundamentálního systému řešení je komplikovanější tehdy, když jsou kořeny charakteristické rovnice násobné. Vlastnímu číslu λ násobnosti 2 odpovídají dvě lineárně nezávislá řešení. Jedno z nich má tvar, který jsme předpokládali, tj. tvar (2).

Uvedme analogii řešeného problému se systémem diferenciálních rovnic. Nechť je dán systém dvou diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

a nechť má charakteristická rovnice tohoto systému dvojnásobný kořen λ . Potom vektorové funkce

$$\mathbf{v}_1 e^{\lambda t}, \quad (\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2) e^{\lambda t},$$

kde $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ jsou tzv. zobecněné (nenulové) vlastní vektory, tvoří fundamentální systém řešení. Tyto vektory vyhovují (viz např. [2]) vztahům

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v}_1 &= \mathbf{0}, \\ (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_1.\end{aligned}\tag{5}$$

Nyní bude ukázáno, že v případě systému diskrétních rovnic se konstrukce zobecněných vlastních vektorů odlišuje od konstrukce zobecněných vlastních vektorů ve spojitém případě a systém (5) je nutné nahradit jiným systémem. Uvažujme systém (1). Jak již bylo uvedeno výše, platí

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \mathbf{0},$$

kde $\mathbf{v}_1$ je vlastní vektor matice $\mathbf{A}$, příslušející vlastnímu číslu λ . Vektor

$$\mathbf{x}_1(n) = \mathbf{v}_1 \lambda^n$$

je tedy řešením soustavy (1). Definujme vektor

$$\mathbf{x}_2(n) = (\mathbf{v}_1 n + \mathbf{v}_2) \lambda^n,\tag{6}$$

kde $\mathbf{v}_2$ je vhodný nenulový vektor. Dosazením vektoru (6) do systému (1) a úpravami získáme dva systémy

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v}_1 &= \mathbf{0}, \\ (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v}_2 &= \lambda \mathbf{v}_1.\end{aligned}\tag{7}$$

Má-li tedy matice $\mathbf{A}$ vlastní číslo λ násobnosti dvě, pak dvě lineárně nezávislá řešení tvořící fundamentální systém řešení mají tvar

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1(n) &= \mathbf{v}_1 \lambda^n, \\ \mathbf{x}_2(n) &= (\mathbf{v}_1 n + \mathbf{v}_2) \lambda^n.\end{aligned}$$

Vektor $\mathbf{v}_2$ vyhovuje systému (7), který je odlišný od systému (5). Obecné řešení výchozího systému (1) zapíšeme ve tvaru

$$\mathbf{x}(n) = K_1 \mathbf{v}_1 \lambda^n + K_2 (\mathbf{v}_1 n + \mathbf{v}_2) \lambda^n,$$

kde K_1 a K_2 jsou libovolné konstanty.

Poděkování

První autor byl podpořen výzkumným záměrem MSM 00216 30503.

Reference

- [1] Elaydi, S.N., *An Introduction to Difference Equations*, Second Edition, Springer, 1999.
- [2] Kuben, J., *Obyčejné diferenciální rovnice*, VA v Brně, Brno, 2000.

Autoři

JOSEF DIBLÍK, Ústav matematiky a deskriptivní geometrie, Fakulta stavební, VUT v Brně, Žižkova 17, 602 00, Brno, Česká republika, e-mail: diblik.j@fce.vutbr.cz

JAROSLAV KLIMEK, Ústav matematiky, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, VUT v Brně, Technická 8, 602 00, Brno, Česká republika, e-mail: xklime11@stud.feec.vutbr.cz