

Příklad. Určete Taylorův polynom druhého stupně pro funkci $f : z = \frac{y^2}{x^2}$ v bodě $A = [-1, 2]$.

Komentář. Taylorův polynom n –tého stupně pro funkci $z = f(x, y)$ v bodě $A = [a_1, a_2]$ je daný vzorcem

$$T_n(X) = f(A) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} d^k f(A)(X),$$

kde $d^k f(A)(X)$ pro $k = 1, 2, \dots, n$ značí tzv. *totální diferenciál k –tého řádu funkce $z = f(x, y)$ v daném bodě A na směr $X - A = (x - a_1, y - a_2)$* .

Komentář. Taylorův polynom n –tého stupně pro funkci $z = f(x, y)$ v bodě $A = [a_1, a_2]$ je daný vzorcem

$$T_n(X) = f(A) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} d^k f(A)(X),$$

kde $d^k f(A)(X)$ pro $k = 1, 2, \dots, n$ značí tzv. *totální diferenciál k –tého řádu funkce $z = f(x, y)$ v daném bodě A na směr $X - A = (x - a_1, y - a_2)$.*

Speciálně pro $n = 1$, resp. $n = 2$ nebo $n = 3$ dostáváme:

Komentář. Taylorův polynom n –tého stupně pro funkci $z = f(x, y)$ v bodě $A = [a_1, a_2]$ je daný vzorcem

$$T_n(X) = f(A) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} d^k f(A)(X),$$

kde $d^k f(A)(X)$ pro $k = 1, 2, \dots, n$ značí tzv. *totální diferenciál k –tého řádu funkce $z = f(x, y)$ v daném bodě A na směr $X - A = (x - a_1, y - a_2)$.*

Speciálně pro $n = 1$, resp. $n = 2$ nebo $n = 3$ dostáváme:

$$T_1(X) = f(A) + df(A)(X), \quad T_2(X) = f(A) + df(A)(X) + \frac{1}{2} d^2 f(A)(X),$$

$$T_3(X) = f(A) + df(A)(X) + \frac{1}{2} d^2 f(A)(X) + \frac{1}{6} d^3 f(A)(X),$$

kde

$$df(A)(X) = f'_x(A) \cdot (x - a_1) + f'_y(A) \cdot (y - a_2),$$

$$d^2 f(A)(X) = f''_{xx}(A) \cdot (x - a_1)^2 + 2f''_{xy}(A) \cdot (x - a_1) \cdot (y - a_2) + f''_{yy}(A) \cdot (y - a_2)^2,$$

$$\begin{aligned} d^3 f(A)(X) = & f'''_{xxx}(A) \cdot (x - a_1)^3 + 3f'''_{xxy}(A) \cdot (x - a_1)^2 \cdot (y - a_2) + \\ & + 3f'''_{xyy}(A) \cdot (x - a_1) \cdot (y - a_2)^2 + f'''_{yyy}(A) \cdot (y - a_2)^3. \end{aligned}$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) =$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2} \right)'_x \stackrel{(?)}{=}$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2} \right)'_x =$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2} \right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3} \right) =$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2} \right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3} \right) = -\frac{2y^2}{x^3}$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2} \right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3} \right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) =$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2} \right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3} \right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2} \right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3} \right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) =$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2} \right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3} \right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2 \right)'_y \stackrel{(?)}{=}$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2} \right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3} \right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2 \right)'_y \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2 \right)'_y =$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2} \right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3} \right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2 \right)'_y \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2 \right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y =$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2} \right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3} \right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2 \right)'_y \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2 \right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2}$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2} \right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3} \right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2 \right)'_y \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2 \right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) =$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2} \right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3} \right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2 \right)'_y \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2 \right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) = 4.$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2} \right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3} \right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2 \right)'_y \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2 \right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) = 4.$$

Počítejme parciální derivace druhého řádu v dané bodě:

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2} \right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3} \right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2 \right)'_y \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2 \right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) = 4.$$

Počítejme parciální derivace druhého řádu v dané bodě:

$$f''_{xx}(X) =$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2}\right)'_x \stackrel{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2}\right)'_x = y^2 \cdot (-2x^{-3}) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2\right)'_y \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2\right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) = 4.$$

Počítejme parciální derivace druhého řádu v dané bodě:

$$f''_{xx}(X) = \left(f'_x(X)\right)'_x =$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2} \right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3} \right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2 \right)'_y \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2 \right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) = 4.$$

Počítejme parciální derivace druhého řádu v dané bodě:

$$f''_{xx}(X) = \left(f'_x(X) \right)'_x = \left(-\frac{2y^2}{x^3} \right)'_x =$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2} \right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3} \right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2 \right)'_y \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2 \right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) = 4.$$

Počítejme parciální derivace druhého řádu v dané bodě:

$$f''_{xx}(X) = \left(f'_x(X) \right)'_x = \left(-\frac{2y^2}{x^3} \right)'_x = -2y^2 \cdot \left(x^{-3} \right)'_x =$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2} \right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3} \right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2 \right)'_y \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2 \right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) = 4.$$

Počítejme parciální derivace druhého řádu v dané bodě:

$$f''_{xx}(X) = \left(f'_x(X) \right)'_x = \left(-\frac{2y^2}{x^3} \right)'_x = -2y^2 \cdot \left(x^{-3} \right)'_x = \frac{6y^2}{x^4}$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2} \right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3} \right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2 \right)'_y \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2 \right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) = 4.$$

Počítejme parciální derivace druhého řádu v dané bodě:

$$f''_{xx}(X) = \left(f'_x(X) \right)'_x = \left(-\frac{2y^2}{x^3} \right)'_x = -2y^2 \cdot \left(x^{-3} \right)'_x = \frac{6y^2}{x^4} \Rightarrow f''_{xx}(A) =$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2} \right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3} \right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2 \right)'_y \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2 \right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) = 4.$$

Počítejme parciální derivace druhého řádu v dané bodě:

$$f''_{xx}(X) = \left(f'_x(X) \right)'_x = \left(-\frac{2y^2}{x^3} \right)'_x = -2y^2 \cdot \left(x^{-3} \right)'_x = \frac{6y^2}{x^4} \Rightarrow f''_{xx}(A) = 24;$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2} \right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3} \right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2 \right)'_y \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2 \right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) = 4.$$

Počítejme parciální derivace druhého řádu v dané bodě:

$$f''_{xx}(X) = \left(f'_x(X) \right)'_x = \left(-\frac{2y^2}{x^3} \right)'_x = -2y^2 \cdot \left(x^{-3} \right)'_x = \frac{6y^2}{x^4} \Rightarrow f''_{xx}(A) = 24;$$

$$f''_{xy}(X) =$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2} \right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3} \right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2 \right)'_y \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2 \right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) = 4.$$

Počítejme parciální derivace druhého řádu v dané bodě:

$$f''_{xx}(X) = \left(f'_x(X) \right)'_x = \left(-\frac{2y^2}{x^3} \right)'_x = -2y^2 \cdot \left(x^{-3} \right)'_x = \frac{6y^2}{x^4} \Rightarrow f''_{xx}(A) = 24;$$

$$f''_{xy}(X) = \left(f'_x(X) \right)'_y =$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2} \right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3} \right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2 \right)'_y \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2 \right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) = 4.$$

Počítejme parciální derivace druhého řádu v dané bodě:

$$f''_{xx}(X) = \left(f'_x(X) \right)'_x = \left(-\frac{2y^2}{x^3} \right)'_x = -2y^2 \cdot \left(x^{-3} \right)'_x = \frac{6y^2}{x^4} \Rightarrow f''_{xx}(A) = 24;$$

$$f''_{xy}(X) = \left(f'_x(X) \right)'_y = \left(-\frac{2}{x^3} \cdot y^2 \right)'_y \stackrel{(?)}{=}$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2} \right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3} \right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2 \right)'_y \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2 \right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) = 4.$$

Počítejme parciální derivace druhého řádu v dané bodě:

$$f''_{xx}(X) = \left(f'_x(X) \right)'_x = \left(-\frac{2y^2}{x^3} \right)'_x = -2y^2 \cdot \left(x^{-3} \right)'_x = \frac{6y^2}{x^4} \Rightarrow f''_{xx}(A) = 24;$$

$$f''_{xy}(X) = \left(f'_x(X) \right)'_y = \left(-\frac{2}{x^3} \cdot y^2 \right)'_y \stackrel{(?)}{=} -\frac{2}{x^3} \cdot \left(y^2 \right)'_y = -\frac{4y}{x^3}$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2} \right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3} \right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2 \right)'_y \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2 \right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) = 4.$$

Počítejme parciální derivace druhého řádu v dané bodě:

$$f''_{xx}(X) = \left(f'_x(X) \right)'_x = \left(-\frac{2y^2}{x^3} \right)'_x = -2y^2 \cdot \left(x^{-3} \right)'_x = \frac{6y^2}{x^4} \Rightarrow f''_{xx}(A) = 24;$$

$$f''_{xy}(X) = \left(f'_x(X) \right)'_y = \left(-\frac{2}{x^3} \cdot y^2 \right)'_y \stackrel{(?)}{=} -\frac{2}{x^3} \cdot \left(y^2 \right)'_y = -\frac{4y}{x^3} \Rightarrow f''_{xy}(A) =$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2} \right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3} \right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2 \right)'_y \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2 \right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) = 4.$$

Počítejme parciální derivace druhého řádu v dané bodě:

$$f''_{xx}(X) = \left(f'_x(X) \right)'_x = \left(-\frac{2y^2}{x^3} \right)'_x = -2y^2 \cdot \left(x^{-3} \right)'_x = \frac{6y^2}{x^4} \Rightarrow f''_{xx}(A) = 24;$$

$$f''_{xy}(X) = \left(f'_x(X) \right)'_y = \left(-\frac{2}{x^3} \cdot y^2 \right)'_y \stackrel{(?)}{=} -\frac{2}{x^3} \cdot \left(y^2 \right)'_y = -\frac{4y}{x^3} \Rightarrow f''_{xy}(A) = 8;$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2}\right)'_x \stackrel{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2}\right)'_x = y^2 \cdot (-2x^{-3}) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2\right)'_y \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2\right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) = 4.$$

Počítejme parciální derivace druhého řádu v dané bodě:

$$f''_{xx}(X) = \left(f'_x(X)\right)'_x = \left(-\frac{2y^2}{x^3}\right)'_x = -2y^2 \cdot \left(x^{-3}\right)'_x = \frac{6y^2}{x^4} \Rightarrow f''_{xx}(A) = 24;$$

$$f''_{xy}(X) = \left(f'_x(X)\right)'_y = \left(-\frac{2}{x^3} \cdot y^2\right)'_y \stackrel{(?)}{=} -\frac{2}{x^3} \cdot \left(y^2\right)'_y = -\frac{4y}{x^3} \Rightarrow f''_{xy}(A) = 8;$$

$$f''_{yy}(X) =$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2} \right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3} \right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2 \right)'_y \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2 \right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) = 4.$$

Počítejme parciální derivace druhého řádu v dané bodě:

$$f''_{xx}(X) = \left(f'_x(X) \right)'_x = \left(-\frac{2y^2}{x^3} \right)'_x = -2y^2 \cdot \left(x^{-3} \right)'_x = \frac{6y^2}{x^4} \Rightarrow f''_{xx}(A) = 24;$$

$$f''_{xy}(X) = \left(f'_x(X) \right)'_y = \left(-\frac{2}{x^3} \cdot y^2 \right)'_y \stackrel{(?)}{=} -\frac{2}{x^3} \cdot \left(y^2 \right)'_y = -\frac{4y}{x^3} \Rightarrow f''_{xy}(A) = 8;$$

$$f''_{yy}(X) = \left(f'_y(X) \right)'_y =$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2} \right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3} \right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2 \right)'_y \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2 \right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) = 4.$$

Počítejme parciální derivace druhého řádu v dané bodě:

$$f''_{xx}(X) = \left(f'_x(X) \right)'_x = \left(-\frac{2y^2}{x^3} \right)'_x = -2y^2 \cdot \left(x^{-3} \right)'_x = \frac{6y^2}{x^4} \Rightarrow f''_{xx}(A) = 24;$$

$$f''_{xy}(X) = \left(f'_x(X) \right)'_y = \left(-\frac{2}{x^3} \cdot y^2 \right)'_y \stackrel{(?)}{=} -\frac{2}{x^3} \cdot \left(y^2 \right)'_y = -\frac{4y}{x^3} \Rightarrow f''_{xy}(A) = 8;$$

$$f''_{yy}(X) = \left(f'_y(X) \right)'_y = \left(\frac{2}{x^2} \cdot y \right)'_y \stackrel{(?)}{=}$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2} \right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3} \right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2 \right)'_y \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2 \right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) = 4.$$

Počítejme parciální derivace druhého řádu v dané bodě:

$$f''_{xx}(X) = \left(f'_x(X) \right)'_x = \left(-\frac{2y^2}{x^3} \right)'_x = -2y^2 \cdot \left(x^{-3} \right)'_x = \frac{6y^2}{x^4} \Rightarrow f''_{xx}(A) = 24;$$

$$f''_{xy}(X) = \left(f'_x(X) \right)'_y = \left(-\frac{2}{x^3} \cdot y^2 \right)'_y \stackrel{(?)}{=} -\frac{2}{x^3} \cdot \left(y^2 \right)'_y = -\frac{4y}{x^3} \Rightarrow f''_{xy}(A) = 8;$$

$$f''_{yy}(X) = \left(f'_y(X) \right)'_y = \left(\frac{2}{x^2} \cdot y \right)'_y \stackrel{(?)}{=} \frac{2}{x^2} \cdot (y)'_y = \frac{2}{x^2}$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2} \right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3} \right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2 \right)'_y \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2 \right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) = 4.$$

Počítejme parciální derivace druhého řádu v dané bodě:

$$f''_{xx}(X) = \left(f'_x(X) \right)'_x = \left(-\frac{2y^2}{x^3} \right)'_x = -2y^2 \cdot \left(x^{-3} \right)'_x = \frac{6y^2}{x^4} \Rightarrow f''_{xx}(A) = 24;$$

$$f''_{xy}(X) = \left(f'_x(X) \right)'_y = \left(-\frac{2}{x^3} \cdot y^2 \right)'_y \stackrel{(?)}{=} -\frac{2}{x^3} \cdot \left(y^2 \right)'_y = -\frac{4y}{x^3} \Rightarrow f''_{xy}(A) = 8;$$

$$f''_{yy}(X) = \left(f'_y(X) \right)'_y = \left(\frac{2}{x^2} \cdot y \right)'_y \stackrel{(?)}{=} \frac{2}{x^2} \cdot (y)'_y = \frac{2}{x^2} \Rightarrow f''_{yy}(A) =$$

Řešení. Počítejme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [-1, 2]$:

$$f'_x(X) = \left(y^2 \cdot x^{-2} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} y^2 \cdot \left(x^{-2} \right)'_x = y^2 \cdot \left(-2x^{-3} \right) = -\frac{2y^2}{x^3} \Rightarrow f'_x(A) = 8;$$

$$f'_y(X) = \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2 \right)'_y \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2 \right)'_y = \frac{1}{x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow f'_y(A) = 4.$$

Počítejme parciální derivace druhého řádu v dané bodě:

$$f''_{xx}(X) = \left(f'_x(X) \right)'_x = \left(-\frac{2y^2}{x^3} \right)'_x = -2y^2 \cdot \left(x^{-3} \right)'_x = \frac{6y^2}{x^4} \Rightarrow f''_{xx}(A) = 24;$$

$$f''_{xy}(X) = \left(f'_x(X) \right)'_y = \left(-\frac{2}{x^3} \cdot y^2 \right)'_y \stackrel{(?)}{=} -\frac{2}{x^3} \cdot \left(y^2 \right)'_y = -\frac{4y}{x^3} \Rightarrow f''_{xy}(A) = 8;$$

$$f''_{yy}(X) = \left(f'_y(X) \right)'_y = \left(\frac{2}{x^2} \cdot y \right)'_y \stackrel{(?)}{=} \frac{2}{x^2} \cdot (y)'_y = \frac{2}{x^2} \Rightarrow f''_{yy}(A) = 2.$$

Dílčí shrnutí:

$$f(A) = 4,$$

$$f'_x(A) = 8, f'_y(A) = 4,$$

$$f''_{xx}(A) = 24, f''_{xy}(A) = 8, f''_{yy}(A) = 2.$$

Zapišme analytický předpis hledaného Taylorova polynomu:

$$T_2(X) =$$

Dílčí shrnutí:

$$f(A) = 4,$$

$$f'_x(A) = 8, f'_y(A) = 4,$$

$$f''_{xx}(A) = 24, f''_{xy}(A) = 8, f''_{yy}(A) = 2.$$

Zapišme analytický předpis hledaného Taylorova polynomu:

$$\begin{aligned} T_2(X) &= 4 + 8(x+1) + 4(y-2) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[24(x+1)^2 + 2 \cdot 8(x+1)(y-2) + 2(y-2)^2 \right] = \\ &= \end{aligned}$$

Díličí shrnutí: $f(A) = 4$, $f'_x(A) = 8$, $f'_y(A) = 4$, $f''_{xx}(A) = 24$, $f''_{xy}(A) = 8$, $f''_{yy}(A) = 2$.

Zapišme analytický předpis hledaného Taylorova polynomu:

$$\begin{aligned} T_2(X) &= 4 + 8(x+1) + 4(y-2) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[24(x+1)^2 + 2 \cdot 8(x+1)(y-2) + 2(y-2)^2 \right] = \\ &= 4 + 8(x+1) + 4(y-2) + 12(x+1)^2 + 8(x+1)(y-2) + (y-2)^2 = \\ &= \end{aligned}$$

Díličí shrnutí: $f(A) = 4$, $f'_x(A) = 8$, $f'_y(A) = 4$, $f''_{xx}(A) = 24$, $f''_{xy}(A) = 8$, $f''_{yy}(A) = 2$.

Zapišme analytický předpis hledaného Taylorova polynomu:

$$\begin{aligned} T_2(X) &= 4 + 8(x+1) + 4(y-2) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[24(x+1)^2 + 2 \cdot 8(x+1)(y-2) + 2(y-2)^2 \right] = \\ &= 4 + 8(x+1) + 4(y-2) + 12(x+1)^2 + 8(x+1)(y-2) + (y-2)^2 = \\ &= \underline{\underline{4 + 16x + 8y + 12x^2 + 8xy + y^2}}. \end{aligned}$$