Zapamatujte si:

logaritmická funkce o základu a

$f(x) = \log_a x,\ a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$

$y = \log_a x \iff x = a^y.$

Pro všechna $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ platí:

$$\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \quad (1)$$

$$\log_a x_1/x_2 = \log_a x_1 - \log_a x_2, \quad (2)$$

$$\log_a x_1^k = k \cdot \log_a x_1,\ k \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

$$\log_b x_1 = \log_a x_1 / \log_a b, \quad (4)$$

kde $a, b \in \mathbb{R},\ a > 0,\ b > 0,\ a \neq 1 \neq b.$

Příklad: *S použitím předchozích vzorců (1)–(4) řešte rovnice*

$$1)\ \log{(x+2)} + \log{(x+1)} = 2 - \log 5, \quad 2)\ x^{\log x} + 10x^{-\log x} = 11, \quad 3)\ x^{\log_3 x} = 9x.$$

Řešení:

1) Užitím základních vlastností logaritmů upravíme rovnici na tvar

$$\log\left((x+2)(x+1)\right) = \log\frac{100}{5}.$$

Příklad: *S použitím předchozích vzorců (1)–(4) řešte rovnice*

$$1)\ \log(x+2)+\log(x+1)=2-\log 5,\qquad 2)\ x^{\log x}+10x^{-\log x}=11,\qquad 3)\ x^{\log_3 x}=9x.$$

Řešení:

1) Užitím základních vlastností logaritmů upravíme rovnici na tvar

$$\log((x+2)(x+1))=\log\frac{100}{5}.$$

Odtud dostaneme rovnici $x^2+3x+2=20$,

Příklad: *S použitím předchozích vzorců (1)–(4) řešte rovnice*

$$1)\ \log{(x+2)} + \log{(x+1)} = 2 - \log 5, \quad 2)\ x^{\log x} + 10x^{-\log x} = 11, \quad 3)\ x^{\log_3 x} = 9x.$$

Řešení:

1) Užitím základních vlastností logaritmů upravíme rovnici na tvar

$$\log{((x+2)(x+1))} = \log\frac{100}{5}.$$

Odtud dostaneme rovnici $x^2 + 3x + 2 = 20$, jejíž řešení jsou

Příklad: *S použitím předchozích vzorců (1)–(4) řešte rovnice*

$$1)\ \log(x+2)+\log(x+1)=2-\log 5, \quad 2)\ x^{\log x}+10x^{-\log x}=11, \quad 3)\ x^{\log_3 x}=9x.$$

Řešení:

1) Užitím základních vlastností logaritmů upravíme rovnici na tvar

$$\log\left((x+2)(x+1)\right)=\log\frac{100}{5}.$$

Odtud dostaneme rovnici $x^2+3x+2=20$, jejíž řešení jsou $x_1=3$, $x_2=-6$.

Příklad: *S použitím předchozích vzorců (1)–(4) řešte rovnice*

$$1)\ \log(x+2)+\log(x+1)=2-\log 5,\qquad 2)\ x^{\log x}+10x^{-\log x}=11,\qquad 3)\ x^{\log_3 x}=9x.$$

Řešení:

1) Užitím základních vlastností logaritmů upravíme rovnici na tvar

$$\log((x+2)(x+1))=\log\frac{100}{5}.$$

Odtud dostaneme rovnici $x^2+3x+2=20$, jejíž řešení jsou $x_1=3$, $x_2=-6$. Zadané rovnici vyhovuje pouze $x_1=3$, jak si lehce ověříme dosazením do původní rovnice.

Příklad: *S použitím předchozích vzorců (1)–(4) řešte rovnice*

$$1)\ \log(x+2)+\log(x+1)=2-\log 5, \quad 2)\ x^{\log x}+10x^{-\log x}=11, \quad 3)\ x^{\log_3 x}=9x.$$

Řešení:

1) Užitím základních vlastností logaritmů upravíme rovnici na tvar

$$\log((x+2)(x+1))=\log\frac{100}{5}.$$

Odtud dostaneme rovnici $x^2+3x+2=20$, jejíž řešení jsou $x_1=3$, $x_2=-6$. Zadané rovnici vyhovuje pouze $x_1=3$, jak si lehce ověříme dosazením do původní rovnice.

2) Zavedením substituce $x^{\log x}=u$ získáme rovnici $u+10u^{-1}=11$,

Příklad: *S použitím předchozích vzorců (1)–(4) řešte rovnice*

1) $\log(x+2)+\log(x+1) = 2-\log 5$, 2) $x^{\log x}+10x^{-\log x} = 11$, 3) $x^{\log_3 x} = 9x$.

Řešení:

1) Užitím základních vlastností logaritmů upravíme rovnici na tvar

$$\log((x+2)(x+1)) = \log \frac{100}{5}.$$

Odtud dostaneme rovnici $x^2+3x+2 = 20$, jejíž řešení jsou $x_1 = 3$, $x_2 = -6$. Zadané rovnici vyhovuje pouze $x_1 = 3$, jak si lehce ověříme dosazením do původní rovnice.

2) Zavedením substituce $x^{\log x} = u$ získáme rovnici $u+10u^{-1} = 11$, kterou můžeme upravit na rovnici $u^2-11u+10 = 0$,

Příklad: *S použitím předchozích vzorců (1)–(4) řešte rovnice*

$$1)\ \log(x+2)+\log(x+1)=2-\log 5,\qquad 2)\ x^{\log x}+10x^{-\log x}=11,\qquad 3)\ x^{\log_3 x}=9x.$$

Řešení:

1) Užitím základních vlastností logaritmů upravíme rovnici na tvar

$$\log\left((x+2)(x+1)\right)=\log\frac{100}{5}.$$

Odtud dostaneme rovnici $x^2+3x+2=20$, jejíž řešení jsou $x_1=3$, $x_2=-6$. Zadané rovnici vyhovuje pouze $x_1=3$, jak si lehce ověříme dosazením do původní rovnice.

2) Zavedením substituce $x^{\log x}=u$ získáme rovnici $u+10u^{-1}=11$, kterou můžeme upravit na rovnici $u^2-11u+10=0$, mající řešení $u_1=10$, $u_2=1$.

Příklad: *S použitím předchozích vzorců (1)–(4) řešte rovnice*

$$1)\ \log(x+2)+\log(x+1)=2-\log 5, \quad 2)\ x^{\log x}+10x^{-\log x}=11, \quad 3)\ x^{\log_3 x}=9x.$$

Řešení:

1) Užitím základních vlastností logaritmů upravíme rovnici na tvar

$$\log((x+2)(x+1))=\log\frac{100}{5}.$$

Odtud dostaneme rovnici $x^2+3x+2=20$, jejíž řešení jsou $x_1=3$, $x_2=-6$. Zadané rovnici vyhovuje pouze $x_1=3$, jak si lehce ověříme dosazením do původní rovnice.

2) Zavedením substituce $x^{\log x}=u$ získáme rovnici $u+10u^{-1}=11$, kterou můžeme upravit na rovnici $u^2-11u+10=0$, mající řešení $u_1=10$, $u_2=1$. Zlogaritmováním substituční rovnice $x^{\log x}=u$ vyjde $\log^2 x=\log u$.

Příklad: *S použitím předchozích vzorců (1)–(4) řešte rovnice*

$$1)\ \log(x+2)+\log(x+1)=2-\log 5,\qquad 2)\ x^{\log x}+10x^{-\log x}=11,\qquad 3)\ x^{\log_3 x}=9x.$$

Řešení:

1) Užitím základních vlastností logaritmů upravíme rovnici na tvar

$$\log((x+2)(x+1))=\log\frac{100}{5}.$$

Odtud dostaneme rovnici $x^2+3x+2=20$, jejíž řešení jsou $x_1=3$, $x_2=-6$. Zadané rovnici vyhovuje pouze $x_1=3$, jak si lehce ověříme dosazením do původní rovnice.

2) Zavedením substituce $x^{\log x}=u$ získáme rovnici $u+10u^{-1}=11$, kterou můžeme upravit na rovnici $u^2-11u+10=0$, mající řešení $u_1=10$, $u_2=1$. Zlogaritmováním substituční rovnice $x^{\log x}=u$ vyjde $\log^2 x=\log u$. Dosazením $u_1=10$ dostáváme rovnici $\log^2 x=1$,

Příklad: *S použitím předchozích vzorců (1)–(4) řešte rovnice*

$$1)\ \log{(x+2)} + \log{(x+1)} = 2 - \log 5, \quad 2)\ x^{\log x} + 10x^{-\log x} = 11, \quad 3)\ x^{\log_3 x} = 9x.$$

Řešení:

1) Užitím základních vlastností logaritmů upravíme rovnici na tvar

$$\log\left((x+2)(x+1)\right) = \log\frac{100}{5}.$$

Odtud dostaneme rovnici $x^2 + 3x + 2 = 20$, jejíž řešení jsou $x_1 = 3$, $x_2 = -6$. Zadané rovnici vyhovuje pouze $x_1 = 3$, jak si lehce ověříme dosazením do původní rovnice.

2) Zavedením substituce $x^{\log x} = u$ získáme rovnici $u + 10u^{-1} = 11$, kterou můžeme upravit na rovnici $u^2 - 11u + 10 = 0$, mající řešení $u_1 = 10$, $u_2 = 1$. Zlogaritmováním substituční rovnice $x^{\log x} = u$ vyjde $\log^2 x = \log u$. Dosazením $u_1 = 10$ dostáváme rovnici $\log^2 x = 1$, odtud $\log x = 1$ nebo $\log x = -1$ a tedy $x = 10$ nebo $x = 1/10$.

Příklad: *S použitím předchozích vzorců (1)–(4) řešte rovnice*

$$1)\ \log(x+2)+\log(x+1)=2-\log 5, \qquad 2)\ x^{\log x}+10x^{-\log x}=11, \qquad 3)\ x^{\log_3 x}=9x.$$

Řešení:

1) Užitím základních vlastností logaritmů upravíme rovnici na tvar

$$\log((x+2)(x+1))=\log\frac{100}{5}.$$

Odtud dostaneme rovnici $x^2+3x+2=20$, jejíž řešení jsou $x_1=3$, $x_2=-6$. Zadané rovnici vyhovuje pouze $x_1=3$, jak si lehce ověříme dosazením do původní rovnice.

2) Zavedením substituce $x^{\log x}=u$ získáme rovnici $u+10u^{-1}=11$, kterou můžeme upravit na rovnici $u^2-11u+10=0$, mající řešení $u_1=10$, $u_2=1$. Zlogaritmováním substituční rovnice $x^{\log x}=u$ vyjde $\log^2 x=\log u$. Dosazením $u_1=10$ dostáváme rovnici $\log^2 x=1$, odtud $\log x=1$ nebo $\log x=-1$ a tedy $x=10$ nebo $x=1/10$. Dosazením $u_2=1$ získáme rovnici $\log x=0$, jíž vyhovuje $x=1$.

Příklad: *S použitím předchozích vzorců (1)–(4) řešte rovnice*

$$1)\ \log(x+2)+\log(x+1)=2-\log 5,\qquad 2)\ x^{\log x}+10x^{-\log x}=11,\qquad 3)\ x^{\log_3 x}=9x.$$

Řešení:

1) Užitím základních vlastností logaritmů upravíme rovnici na tvar

$$\log\left((x+2)(x+1)\right)=\log\frac{100}{5}.$$

Odtud dostaneme rovnici $x^2+3x+2=20$, jejíž řešení jsou $x_1=3$, $x_2=-6$. Zadané rovnici vyhovuje pouze $x_1=3$, jak si lehce ověříme dosazením do původní rovnice.

2) Zavedením substituce $x^{\log x}=u$ získáme rovnici $u+10u^{-1}=11$, kterou můžeme upravit na rovnici $u^2-11u+10=0$, mající řešení $u_1=10$, $u_2=1$. Zlogaritmováním substituční rovnice $x^{\log x}=u$ vyjde $\log^2 x=\log u$. Dosazením $u_1=10$ dostáváme rovnici $\log^2 x=1$, odtud $\log x=1$ nebo $\log x=-1$ a tedy $x=10$ nebo $x=1/10$. Dosazením $u_2=1$ získáme rovnici $\log x=0$, jíž vyhovuje $x=1$. Pomocí původní rovnice si můžeme ověřit, že všechna získaná řešení jsou správná.

Příklad: *S použitím předchozích vzorců (1)–(4) řešte rovnice*

$$1)\ \log(x+2)+\log(x+1)=2-\log 5, \quad 2)\ x^{\log x}+10x^{-\log x}=11, \quad 3)\ x^{\log_3 x}=9x.$$

Řešení:

1) Užitím základních vlastností logaritmů upravíme rovnici na tvar

$$\log((x+2)(x+1))=\log\frac{100}{5}.$$

Odtud dostaneme rovnici $x^2+3x+2=20$, jejíž řešení jsou $x_1=3$, $x_2=-6$. Zadané rovnici vyhovuje pouze $x_1=3$, jak si lehce ověříme dosazením do původní rovnice.

2) Zavedením substituce $x^{\log x}=u$ získáme rovnici $u+10u^{-1}=11$, kterou můžeme upravit na rovnici $u^2-11u+10=0$, mající řešení $u_1=10$, $u_2=1$. Zlogaritmováním substituční rovnice $x^{\log x}=u$ vyjde $\log^2 x=\log u$. Dosazením $u_1=10$ dostáváme rovnici $\log^2 x=1$, odtud $\log x=1$ nebo $\log x=-1$ a tedy $x=10$ nebo $x=1/10$. Dosazením $u_2=1$ získáme rovnici $\log x=0$, jíž vyhovuje $x=1$. Pomocí původní rovnice si můžeme ověřit, že všechna získaná řešení jsou správná.

3) Zlogaritmováním rovnice (pomocí logaritmu o základu tři) převedeme zadanou rovnici na tvar $\log_3^2 x=2+\log_3 x$.

Příklad: *S použitím předchozích vzorců (1)–(4) řešte rovnice*

$$1)\ \log(x+2)+\log(x+1)=2-\log 5,\qquad 2)\ x^{\log x}+10x^{-\log x}=11,\qquad 3)\ x^{\log_3 x}=9x.$$

Řešení:

1) Užitím základních vlastností logaritmů upravíme rovnici na tvar

$$\log((x+2)(x+1))=\log\frac{100}{5}.$$

Odtud dostaneme rovnici $x^2+3x+2=20$, jejíž řešení jsou $x_1=3$, $x_2=-6$. Zadané rovnici vyhovuje pouze $x_1=3$, jak si lehce ověříme dosazením do původní rovnice.

2) Zavedením substituce $x^{\log x}=u$ získáme rovnici $u+10u^{-1}=11$, kterou můžeme upravit na rovnici $u^2-11u+10=0$, mající řešení $u_1=10$, $u_2=1$. Zlogaritmováním substituční rovnice $x^{\log x}=u$ vyjde $\log^2 x=\log u$. Dosazením $u_1=10$ dostáváme rovnici $\log^2 x=1$, odtud $\log x=1$ nebo $\log x=-1$ a tedy $x=10$ nebo $x=1/10$. Dosazením $u_2=1$ získáme rovnici $\log x=0$, jíž vyhovuje $x=1$. Pomocí původní rovnice si můžeme ověřit, že všechna získaná řešení jsou správná.

3) Zlogaritmováním rovnice (pomocí logaritmu o základu tři) převedeme zadanou rovnici na tvar $\log_3^2 x=2+\log_3 x$. Zavedením substituce $\log_3 x=u$ přejde rovnice v kvadratickou rovnici $u^2-u-2=0$,

Příklad: *S použitím předchozích vzorců (1)–(4) řešte rovnice*

$$1)\ \log(x+2)+\log(x+1)=2-\log 5,\qquad 2)\ x^{\log x}+10x^{-\log x}=11,\qquad 3)\ x^{\log_3 x}=9x.$$

Řešení:

1) Užitím základních vlastností logaritmů upravíme rovnici na tvar

$$\log((x+2)(x+1))=\log\frac{100}{5}.$$

Odtud dostaneme rovnici $x^2+3x+2=20$, jejíž řešení jsou $x_1=3$, $x_2=-6$. Zadané rovnici vyhovuje pouze $x_1=3$, jak si lehce ověříme dosazením do původní rovnice.

2) Zavedením substituce $x^{\log x}=u$ získáme rovnici $u+10u^{-1}=11$, kterou můžeme upravit na rovnici $u^2-11u+10=0$, mající řešení $u_1=10$, $u_2=1$. Zlogaritmováním substituční rovnice $x^{\log x}=u$ vyjde $\log^2 x=\log u$. Dosazením $u_1=10$ dostáváme rovnici $\log^2 x=1$, odtud $\log x=1$ nebo $\log x=-1$ a tedy $x=10$ nebo $x=1/10$. Dosazením $u_2=1$ získáme rovnici $\log x=0$, jíž vyhovuje $x=1$. Pomocí původní rovnice si můžeme ověřit, že všechna získaná řešení jsou správná.

3) Zlogaritmováním rovnice (pomocí logaritmu o základu tři) převedeme zadanou rovnici na tvar $\log_3^2 x=2+\log_3 x$. Zavedením substituce $\log_3 x=u$ přejde rovnice v kvadratickou rovnici $u^2-u-2=0$, která má řešení $u_1=2$, $u_2=-1$.

Příklad: *S použitím předchozích vzorců (1)–(4) řešte rovnice*

$$1)\ \log{(x+2)} + \log{(x+1)} = 2 - \log 5, \quad 2)\ x^{\log x} + 10x^{-\log x} = 11, \quad 3)\ x^{\log_3 x} = 9x.$$

Řešení:

1) Užitím základních vlastností logaritmů upravíme rovnici na tvar

$$\log{((x+2)(x+1))} = \log \frac{100}{5}.$$

Odtud dostaneme rovnici $x^2 + 3x + 2 = 20$, jejíž řešení jsou $x_1 = 3$, $x_2 = -6$. Zadané rovnici vyhovuje pouze $x_1 = 3$, jak si lehce ověříme dosazením do původní rovnice.

2) Zavedením substituce $x^{\log x} = u$ získáme rovnici $u + 10u^{-1} = 11$, kterou můžeme upravit na rovnici $u^2 - 11u + 10 = 0$, mající řešení $u_1 = 10$, $u_2 = 1$. Zlogaritmováním substituční rovnice $x^{\log x} = u$ vyjde $\log^2 x = \log u$. Dosazením $u_1 = 10$ dostáváme rovnici $\log^2 x = 1$, odtud $\log x = 1$ nebo $\log x = -1$ a tedy $x = 10$ nebo $x = 1/10$. Dosazením $u_2 = 1$ získáme rovnici $\log x = 0$, jíž vyhovuje $x = 1$. Pomocí původní rovnice si můžeme ověřit, že všechna získaná řešení jsou správná.

3) Zlogaritmováním rovnice (pomocí logaritmu o základu tři) převedeme zadanou rovnici na tvar $\log_3^2 x = 2 + \log_3 x$. Zavedením substituce $\log_3 x = u$ přejde rovnice v kvadratickou rovnici $u^2 - u - 2 = 0$, která má řešení $u_1 = 2$, $u_2 = -1$. Odtud získáme $x_1 = 9$, $x_2 = 1/3$.

Studijní opory pro vyrovnávací kurz z matematiky na FAST VUT vznikly v rámci projektu

Modernizace výuky na Fakultě stavební VUT v Brně v rámci bakalářských a magisterských studijních programů

registrační číslo: CZ.04.1.03/3.2.15.2/0292,

který byl spolufinancován z Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu ČR prostřednictvím Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy v rámci operačního programu *Rozvoj lidských zdrojů*, opatření 3.3.

Oficiální definice ESF zní: *ESF napomáhá rozvoji zaměstnanosti podporou zaměstnatelnosti, podnikatelského ducha, rovných příležitostí a investicemi do lidských zdrojů.*