

INTERPOLAČNÍ POLYNOM

- aproximace zadaných hodnot nebo hledané funkce f funkcí $F(x)$ (polynomem)
- F musí být k f "co nejbliže"
- značení: $\mathcal{P}^{(n)}$... množina všech polynomů stupně $\leq n$

ÚLOHA LAGRANGEOVY INTERPOLACE

- značení:
 x_0, x_1, \dots, x_n ... vzájemně různé body (uzly)
 y_0, y_1, \dots, y_n ... dané hodnoty
 $F(x) \in \mathcal{P}^{(n)}$... hledaná funkce (polynom nebo funkce vytvořená z polynomů), pro kterou platí

$$F(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n$$

- interpolační polynom v Newtonově tvaru:

$$N(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}), \text{ kde}$$

a_0, a_1, \dots, a_n jsou koeficienty splňující soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a_0 &= y_0 \\ a_0 + a_1 \cdot (x_1 - x_0) &= y_1 \\ a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) &= y_2 \\ &\vdots \\ a_0 + a_1(x_n - x_0) + \dots + a_n(x_n - x_0) \cdot \dots \cdot (x_n - x_{n-1}) &= y_n. \end{aligned}$$

Řešení lze popsat rekurzivním způsobem pomocí poměrných diferencí prvního, druhého, ... n -tého řádu – výpočet pomocí tabulky poměrných diferencí si ukážeme na cvičení.

ÚLOHA HERMITEOVY INTERPOLACE

- značení:
 x_0, x_1, \dots, x_n ... vzájemně různé body (uzly)
 y_0, y_1, \dots, y_n ... dané hodnoty
 y'_0, y'_1, \dots, y'_n ... dané hodnoty první derivace
 $F(x) \in \mathcal{P}^{(2n+1)}$... hledaná funkce (polynom nebo funkce vytvořená z polynomů), pro kterou platí

$$\begin{aligned} F(x_i) &= y_i \\ F'(x_i) &= y'_i, i = 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$

- interpolační polynom v zobecněném Newtonově tvaru (Hermiteův interpolační polynom):

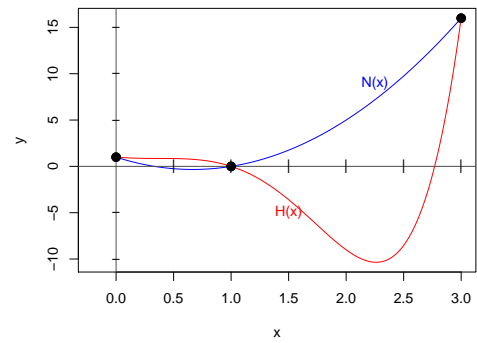
$$H(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}), \text{ kde}$$

a_0, a_1, \dots, a_n jsou koeficienty splňující soustavu rovnic (stejnou jako výše), přičemž každý uzel se v dané soustavě objevuje dvakrát a poměrné diference tvaru $\left| \frac{0}{0} \right|$ jsou nahrazeny zadanými derivacemi.

Příklad 1. Pro zadané hodnoty sestrojte

- interpolační polynom v Newtonově tvaru,
- Hermiteův interpolační polynom.

i	0	1	2
x_i	0	1	3
y_i	1	0	16
y'_i	-1	-4	92



Řešení.

Příklad 2. Hodnotu $\sqrt[3]{1.05}$ aproximujte hodnotou

- interpolačního polynomu v Newtonově tvaru,
- Hermiteova interpolačního polynomu

funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ v uzlech $x_0 = 1$ a $x_1 = 1.2$. V obou případech určete absolutní chybu aproximace. Zaokrouhlete na 6 desetinných míst.

Řešení.

- Úloha Lagrangeovy interpolace, interpolační polynom v Newtonově tvaru:

Tabulka poměrných diferencí:

i	x_i	y_i	$y(x_i, x_{i+1})$
0	1	1	$\frac{1.062659 - 1}{1.2 - 1} = 0.3133295$
1	1.2	1.062659	

interpolační polynom v Newtonově tvaru:

$$N(x) = 1 + 0.3133295 \cdot (x - 1)$$

$$N(1.05) = 1 + 0.3133295 \cdot (1.05 - 1) \doteq 1.015665$$

$$\sqrt[3]{1.05} \doteq 1.016396$$

odhad absolutní chyby: $|N(1.05) - \sqrt[3]{1.05}| = 7.31 \cdot 10^{-4}$

- Úloha Hermiteovy interpolace, interpolační polynom v zobecněném Newtonově tvaru:

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

Tabulka poměrných diferencí:

i	x_i	y_i	$y(x_i, x_{i+1})$	$y(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$y(x_0, x_1, x_2, x_3)$
0	1	1	$f'(1) = 0.333333$	$\frac{0.313295 - 0.333333}{1.2 - 1} = -0.10019$	$\frac{-0.09056 + 0.10019}{1.2 - 1} = 0.04815$
1	1	1			
2	1.2	1.062659	$f'(1.2) = 0.295183$	$\frac{0.295183 - 0.313295}{1.2 - 1} = -0.09056$	
3	1.2	1.062659			

Hermiteův interpolační polynom v zobecněném Newtonově tvaru:

$$H(x) = 1 + 0.333333(x - 1) - 0.10019(x - 1)^2 + 0.04815(x - 1)^2(x - 1.2)$$

$$H(1.05) = 1 + 0.333333(1.05 - 1) - 0.10019(1.05 - 1)^2 + 0.04815(1.05 - 1)^2(1.05 - 1.2) = 1.016398$$

$$\sqrt[3]{1.05} \doteq 1.016396$$

odhad absolutní chyby: $|H(1.05) - \sqrt[3]{1.05}| = 1.99 \cdot 10^{-6}$

Řešený příklad z praxe.

Nákladní trajekt spojující pevninu s ostrovem má maximální kapacitu 1 000 osobních vozů, ovšem nakládka vozů blížící se maximální kapacitě je časově velmi náročná. K dispozici máme tabulku s počty aut naloženými v daném čase

čas [hod]	0.5	0.7	0.9	1.1
y	452	585	689	768
y'	743	590	453	340



Zdroj: [1]

Odhadněte, kolik vozů bylo naloženo za 1 hodinu, použitím

- interpolačního polynomu v Newtonově tvaru,
- Hermiteova interpolačního polynomu.

Řešení.

- interpolační polynom v Newtonově tvaru

Tabulka poměrných diferencí:

i	x_i	y_i	$y(x_i, x_{i+1})$	$y(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$y(x_0, x_1, x_2, x_3)$
0	0.5	452	665		
1	0.7	585	520	$-\frac{725}{2}$	$\frac{250}{3}$
2	0.9	689	395	$-\frac{625}{2}$	
3	1.1	768			

Newtonův interpolační polynom:

$$\begin{aligned}
 N(x) &= 452 + 665 \cdot (x - 0.5) - \frac{725}{2} \cdot (x - 0.5)(x - 0.7) + \frac{250}{3} \cdot (x - 0.5)(x - 0.7)(x - 0.9) = \dots \\
 &= \frac{250}{3}x^3 - \frac{1075}{2}x^2 + \frac{7315}{6}x - \frac{269}{8} \\
 N(1) &= \frac{5851}{8} \doteq 731.3750
 \end{aligned}$$

- Hermiteův interpolační polynom

Tabulka poměrných diferencí:

i	x_i	y_i						
0	0.5	452	743					
1	0.5	452	-390	665	75			
2	0.7	585	-375	590	$\frac{125}{2}$	$-\frac{125}{4}$	$\frac{625}{4}$	
3	0.7	585	-350	520	75	$\frac{125}{4}$	$\frac{625}{6}$	$-\frac{3125}{36}$
4	0.9	689	-335	453	$\frac{225}{4}$	$\frac{375}{4}$	$\frac{1875}{6}$	$-\frac{34375}{36}$
5	0.9	689	-290	395	75	$-\frac{375}{4}$	$-\frac{1875}{4}$	
6	1.1	768	-275	340				
7	1.1	768						

Hermiteův interpolační polynom:

$$H(x) = \dots = -\frac{36169}{25}x^7 + \frac{379051}{50}x^6 - \frac{116768}{7}x^5 + \frac{39985}{2}x^4 - \frac{70177}{5}x^3 + \frac{80314}{15}x^2 - \frac{32171}{245}x + \frac{14227}{145}$$

$$H(1) = \frac{140407}{192} \doteq 731.2865$$

Poznámka k výsledkům.

Pokud víme, že lze počet naložených vozů v čase t vyjádřit vztahem

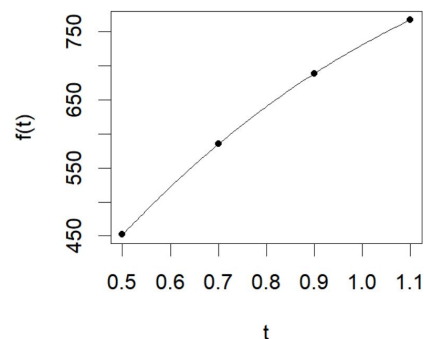
$$f(t) = 1000 \cdot \frac{t}{t + e^{-t}},$$

porovnejte odhadnuté počty naložených aut za 1 hodinu se skutečnou hodnotou:

$$N(1) \doteq 731.3750$$

$$H(1) \doteq 731.2865$$

$$f(1) \doteq 731.0586.$$



Pozn. Zajímají nás odhady počtů naložených aut \Rightarrow po zaokrouhlení se odhady neliší od hodnoty spočítané ze zadané funkce. Počet naložených aut během 1 hodiny je tedy 731.

Zdroj:

[1] <https://cz.depositphotos.com/87003778/stock-illustration-cargo-ship-with-containers.html> (listopad 2018)