ITERAČNÍ METODY ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH ROVNIC

- řešení nelineární rovnice $f(x) = 0$,
- separace kořenů = hledání intervalu $\langle a, b\rangle$, ve kterém se nachází právě jeden kořen,
- předpoklady: f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ + musí být splněna podmínka $f(a) \cdot f(b) < 0$

METODA PŮLENÍ INTERVALU (METODA BISEKCE)

- v každém kroku konstrukce intervalu $\langle a_0, b_0\rangle \supset \langle a_1, b_1\rangle \supset \cdots \supset \langle a_n, b_n\rangle$,
- střed intervalu:

$$s_i = \frac{1}{2}(a_i + b_i), \; i = 0, 1, \ldots, n$$

- odhad chyby:

$$d_i = \frac{1}{2}(b_i - a_i), \; i = 0, 1, \ldots, n$$

- odhad počtu kroků:

$$\frac{b_0 - a_0}{2^{i+1}} < \varepsilon$$

- $f(a_i) \cdot f(s_i) < 0 \longrightarrow a_{i+1} = a_i,\, b_{i+1} = s_i$
  $f(s_i) \cdot f(b_i) < 0 \longrightarrow a_{i+1} = s_i,\, b_{i+1} = b_i$
- STOP podmínky: $d_i < \varepsilon$

NEWTONOVA METODA

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$
- konstrukce:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)},\; f'(x_i) \neq 0,\; i = 0, 1, \ldots$$

- geometrický význam: bod x_{i+1} je průsečík tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $[x_i, f(x_i)]$ s osou x
- Fourierovy podmínky = podmínky konvergence:

1. $f(x) \in C^2(I)$
2. $f'(x), f''(x)$ nemění znaménko na I
3. volba počáteční aproximace: x_0 tak, aby $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$

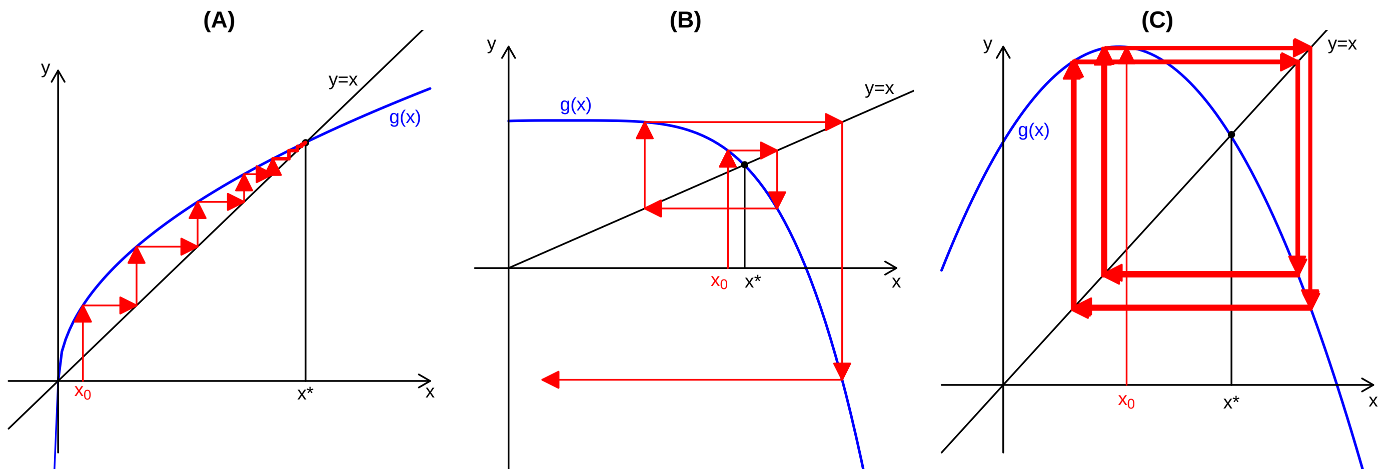
- STOP podmínky: $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$

METODA PROSTÉ ITERACE

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$
- ekvivalence úlohy: hledání kořene rovnice $f(x) = 0$ odpovídá hledání pevného bodu funkce $g(x)$
- podmínky:

1. $g(x) \in C(I)$
2. zobrazení do sebe: $g : I \to I$
3. $|g'(x)| < 1 \quad \forall x \in I$

- konstrukce: $x_{i+1} = g(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots$
- geometrický význam: řešit rovnici $x = g(x)$ znamená hledat průsečík přímky $y = x$ s křivkou $y = g(x)$
- STOP podmínky: $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$



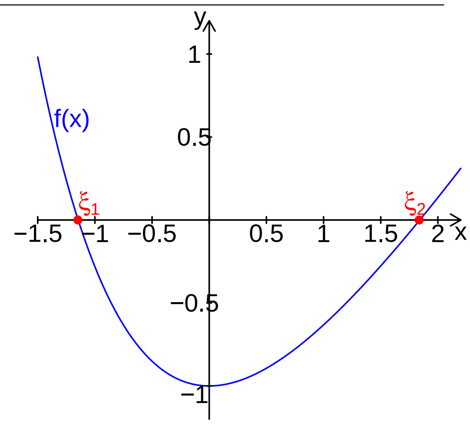
Ukázka: **(A)** přitahující pevný bod, **(B)** odpuzující pevný bod, **(C)** cyklus.

Příklad 1. Najděte všechna řešení rovnice $x + \mathrm{e}^{-x} - 2 = 0$ s přesností 0.01

a) metodou bisekce,

b) Newtonovou metodou,

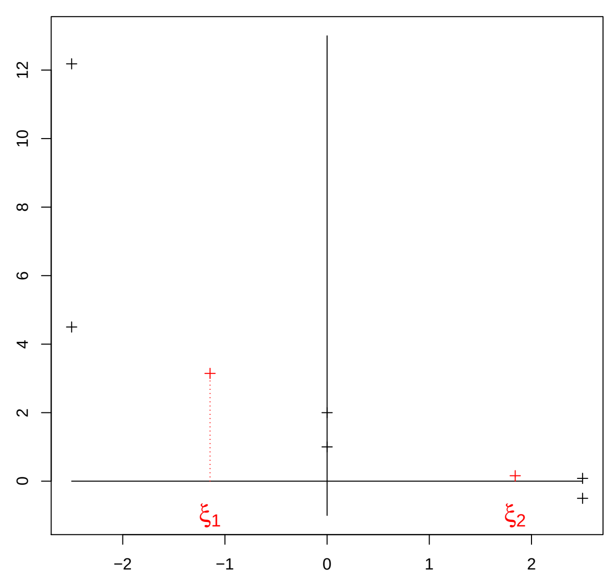
c) metodou prosté iterace.



Řešení.

• hrubý odhad intervalu, určení počátečních aproximací:

$$x + \mathrm{e}^{-x} - 2 = 0$$



$f(x) = x + \mathrm{e}^{-x} - 2$

- interval pro odhad záporného řešení:

$$\xi_1 \in \langle -2, -1 \rangle$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-2) = \\ f(-1) = \end{array}\right\} \quad f(-2) \cdot f(-1) < 0$$

- interval pro odhad kladného řešení:

$$\xi_2 \in \langle 0, 2 \rangle$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = \\ f(2) = \end{array}\right\} \quad f(0) \cdot f(2) < 0$$

a) **metoda bisekce:**

$$s_i = \frac{1}{2}(a_i + b_i)$$
$$d_i = \frac{1}{2}(b_i - a_i)$$
STOP kritérium: $d_i < \varepsilon$

- odhad **záporného** řešení:

odhad počtu kroků:

$$\frac{b_0 - a_0}{2^{i+1}} < \varepsilon$$

tabulka hodnot:

i	a_i	b_i	s_i	d_i	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f(s_i)$
0							
1							
2							
3							
4	-1.1875	-1.125	-1.1563	0.0313	0.0914	-0.0448	0.0217
5	-1.1563	-1.125	-1.1406	0.0156	0.0217	-0.0448	-0.0119
6	-1.1563	-1.1406	-1.1484	$0.0078 < 0.01$	0.0217	-0.0119	0.0048

odhad **záporného** řešení:

$$\hat{x}_1 \doteq -1.1484$$

- odhad **kladného** řešení:

odhad počtu kroků:

$$\frac{b_0 - a_0}{2^{i+1}} < \varepsilon$$
$$\frac{2}{2^{i+1}} < 0.01$$
$$\frac{2}{0.01} < 2^{i+1}$$
$$200 < 2^{i+1}$$
$$\log_2 200 < i + 1$$
$$i > 7.6439 - 1$$
$$i = 7$$

tabulka hodnot:

i	a_i	b_i	s_i	d_i	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f(s_i)$
0	0	2	1	1	-1	0.1353	-0.6321
1	1	2	1.5	0.5	-0.6321	0.1353	-0.2769
2	1.5	2	1.75	0.25	-0.2769	0.1353	-0.0762
3	1.75	2	1.875	0.125	-0.0762	0.1353	0.0284
4	1.75	1.875	1.8125	0.0625	-0.0762	0.0284	-0.0243
5	1.8125	1.875	1.8438	0.0313	-0.0243	0.0284	0.0020
6	1.8125	1.8438	1.8281	0.0156	-0.0243	0.0020	-0.0112
7	1.8281	1.8438	1.8359	$0.0078 < 0.01$	-0.0112	0.0020	-0.0046

odhad **kladného** řešení:

$$\hat{x}_2 \doteq 1.8359$$

b) $\boxed{\text{Newtonova metoda}}$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)},\ i = 0, 1, \ldots$$

STOP kritérium: $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$

- odhad **záporného** řešení:

Fourierovy podmínky:

iterační proces:

i	x_i	x_{i+1}	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0			
1			0.2622
2	-1.2073	-1.1488	0.0585
3	-1.1488	-1.1462	0.0026 < 0.01

odhad **záporného** řešení:

$$\hat{x}_1 \doteq -1.1462$$

- odhad **kladného** řešení:

Fourierovy podmínky:

1. $f(x) = x + \mathrm{e}^{-x} - 2 \in C(\langle 0, 2 \rangle)$
   $f'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x} \in C(\langle 0, 2 \rangle)$
   $f''(x) = \mathrm{e}^{-x} \in C(\langle 0, 2 \rangle)$

2. $f'(0) = 0$
   $f'(2) \doteq 0.8647$
   extrém? $f''(x) = \mathrm{e}^{-x}$ nemá extrém na $\langle 0, 2 \rangle$
   $f''(0) = 1$
   $f''(2) \doteq 0.1353$
   extrém? $f'''(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ nemá extrém na $\langle 0, 2 \rangle$

3. volba počáteční aproximace x_0 :
   $f(0) = -1$
   $f(2) \doteq 0.1353 \longrightarrow f(2) \cdot f''(2) > 0 \longrightarrow x_0 = 2$

iterační proces:

i	x_i	$x_{i+1} = g(x_i)$	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0	2	1.8435	0.1565
1	1.8435	1.8414	$0.0021 < 0.01$

odhad **kladného** řešení:

$$\hat{x}_2 \doteq 1.8414$$

c) $\boxed{\textbf{metoda prosté iterace:}}$

$$x_{i+1} = g(x_i),\ i = 0, 1, \ldots$$
$$\text{STOP kritérium: } \lvert x_{i+1} - x_i \rvert < \varepsilon$$

- odhad **záporného** řešení:

volba iterační funkce:

1. $x + \mathrm{e}^{-x} - 2 = 0$
   $g(x) = x =$, podmínky:

2. $x + \mathrm{e}^{-x} - 2 = 0$

$g(x) = x =$, podmínky:

i	x_i	$x_{i+1} = g(x_i)$	$\|x_{i+1} - x_i\|$
0			
1			
2			
3	-1.1693	-1.1535	0.0158
4	-1.1535	-1.1485	$0.0050 < 0.01$

odhad **záporného** řešení:

$$\hat{x}_1 \doteq -1.1485$$

Pozn. Tabulka hodnot pro jinou volbu počáteční aproximace:

i	x_i	$x_{i+1} = g(x_i)$	$\|x_{i+1} - x_i\|$
0	-1	-1.0986	0.0986
1	-1.0986	-1.1310	0.0323
2	-1.1310	-1.1413	0.0104
3	-1.1413	-1.1446	$0.0033 < 0.01$

odhad **záporného** řešení:

$$\hat{x}_1 \doteq -1.1446$$

- odhad **kladného** řešení:

volba iterační funkce:
$x + \mathrm{e}^{-x} - 2 = 0$
$g(x) = x = 2 - \mathrm{e}^{-x}$, podmínky:

1. $g(x) \in C\langle 0, 2\rangle$
2. $g(0) = 1 \in \langle 0, 2\rangle$
   $g(2) \doteq 1.8647 \in \langle 0, 2\rangle$
   extrém? $g'(x) = \mathrm{e}^{-x} \ldots$ nemá extrém na $\langle 0, 2\rangle$
3. $|g'(0)| = 1 \longrightarrow$ posunout levý krajní bod intervalu do 0.1 $\longrightarrow$ nový interval $\langle 0.1, 2\rangle$ + dodatečné ověření podmínek:
   $g(0.1) \doteq 1.0952 \in \langle 0.1, 2\rangle$, $|g'(0.1)| \doteq |0.9048| < 1$
   $|g'(2)| \doteq |0.1353| < 1$
   extrém? $g''(x) = -\mathrm{e}^{-x} \ldots$ nemá extrém na $\langle 0.1, 2\rangle$

i	x_i	$x_{i+1} = g(x_i)$	$\lvert x_{i+1} - x_i\rvert$
0	0.1	1.0952	0.9952
1	1.0952	1.6655	0.5704
2	1.6655	1.8109	0.1454
3	1.8109	1.8365	0.0256
4	1.8365	1.8406	$0.0041 < 0.01$

odhad **kladného** řešení:
$$\hat{x}_2 \doteq 1.8406$$

Pozn. Tabulka hodnot pro jinou volbu počáteční aproximace:

i	x_i	$x_{i+1} = g(x_i)$	$\lvert x_{i+1} - x_i\rvert$
0	2	1.8647	0.1353
1	1.8647	1.8451	0.0196
2	1.8451	1.8420	$0.0031 < 0.01$

odhad **kladného** řešení:
$$\hat{x}_2 \doteq 1.8420$$

Řešený příklad z praxe. [1]
Parašutista padá z klidového stavu. Jeho rychlost v je dána v závislosti na čase rovnicí

$$v(t) = \frac{gm}{c}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t}\right),$$

kde $g = 9.8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ a $c = 13\ \mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}$. Předpokládejme, že parašutista váží $m = 95$ kg. Odhadněte dobu, po které parašutista dosáhne rychlosti 35 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$

a) analyticky,

b) metodou bisekce (s přesností $\varepsilon < 10^{-3}$),

c) Newtonovou metodou (s přesností $\varepsilon < 10^{-3}$),

d) metodou prosté iterace (s přesností $\varepsilon < 10^{-3}$).

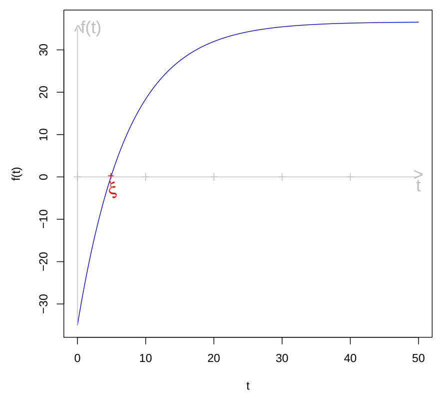
Zdroj: [2]

Řešení.

a) **analytické řešení**:

Řešíme nelineární rovnici $f(t) = 0$, kde $f(t) = \frac{gm}{c}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t}\right) - v$:

$$\begin{aligned} v &= \frac{gm}{c}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t}\right) \\ \frac{cv}{gm} &= 1 - \mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t} \\ \mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t} &= 1 - \frac{cv}{gm} \\ -\frac{c}{m}t &= \ln\left(1 - \frac{cv}{gm}\right) \\ t &= -\frac{m}{c}\ln\left(1 - \frac{cv}{gm}\right) \\ t &\doteq 4.9023\,\mathrm{s}\ \text{(přesné řešení)} \end{aligned}$$



b) **metoda bisekce:** např. $I = \langle 3, 6\rangle$

i	a_i	b_i	s_i	d_i	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f(s_i)$
0	3.0000	6.0000	4.5000	1.5000	-10.8872	5.1069	-2.0723
1	4.5000	6.0000	5.2500	0.7500	-2.0723	5.1069	1.7014
2	4.5000	5.2500	4.8750	0.3750	-2.0723	1.7014	-0.1371
3	4.8750	5.2500	5.0625	0.1875	-0.1371	1.7014	0.7939
4	4.8750	5.0625	4.9688	0.0938	-0.1371	0.7939	0.3314
5	4.8750	4.9688	4.9219	0.0469	-0.1371	0.3314	0.0979
6	4.8750	4.9219	4.8984	0.0234	-0.1371	0.0979	-0.0194
7	4.8984	4.9219	4.9102	0.0117	-0.0194	0.0979	0.0393
8	4.8984	4.9102	4.9043	0.0059	-0.0194	0.0393	0.0100
9	4.8984	4.9043	4.9014	0.0029	-0.0194	0.0100	-0.0047
10	4.9014	4.9043	4.9028	0.0015	-0.0047	0.0100	0.0027
11	4.9014	4.9028	4.9021	$0.0007 < \varepsilon$	-0.0047	0.0027	-0.0010

odhad řešení:

$$\hat{t} \doteq 4.9021$$

c) **Newtonova metoda:**

Vycházíme z rovnice

$$v = \frac{gm}{c}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t}\right)$$

a řešíme $f(t) = 0$, kde

$$f(t) = \frac{gm}{c}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t}\right) - v.$$

Volíme interval $I = \langle 3, 6\rangle$.
Ověření Fourierových podmínek:

1. $f(t) = \frac{gm}{c}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t}\right) - v \in C\left(\langle 3,6\rangle\right)$
   $f'(t) = \frac{gm}{c}\left(-\mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t}\right) \cdot \frac{-c}{m} = \ldots = g\mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t} \in C\left(\langle 3,6\rangle\right)$
   $f''(t) = -\frac{cg}{m}\mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t} \in C\left(\langle 3,6\rangle\right)$
2. $f'(3) \doteq 6.5004$
   $f'(6) \doteq 4.3117$
   extrém? exponenciála monotonní funkce $\Rightarrow$ nemá extrém na I
   $f''(3) \doteq -0.8895$
   $f''(6) \doteq -0.5900$
   extrém? exponenciála monotonní funkce $\Rightarrow$ nemá extrém na I

3. volba počáteční aproximace x_0 :
   $f(3) \doteq -10.8872$
   $f(6) \doteq 5.1069 \longrightarrow f(3) \cdot f''(3) > 0 \longrightarrow x_0 = 3$

iterační proces:

i	x_i	$x_{i+1} = g(x_i)$	$\lvert x_{i+1} - x_i\rvert$
0	3.0000	4.6749	1.6749
1	4.6749	4.8988	0.2239
2	4.8988	4.9023	0.0035
3	4.9023	4.9023	$0.00000084 < 0.001$

odhad řešení:

$$\hat{t} \doteq 4.9023$$

d) $\boxed{\textbf{metoda prosté iterace}:}$

Volba iterační funkce: $g(t) = \dfrac{gm}{gm - cv} t e^{-\frac{c}{m}t}$, $I = \langle 3, 6 \rangle$

Ověření podmínek:

1. $g(t) \in C(\langle 3, 6 \rangle)$
2. $g(3) \doteq 3.8920 \in \langle 3, 6 \rangle$
   $g(6) \doteq 5.1632 \in \langle 3, 6 \rangle$
   Má funkce $g(t)$ na intervalu $\langle 3, 6 \rangle$ extrém?
   $$g'(t) = \frac{gm}{gm - cv} e^{-\frac{c}{m}t}\left(1 - \frac{c}{m}t\right) = 0$$
   $$\Rightarrow e^{-\frac{c}{m}t} = 0 \vee 1 - \frac{c}{m}t = 0$$
   $$\text{může nastat pouze 2. situace: } 1 - \frac{c}{m}t = 0 \Rightarrow t = \frac{m}{c} \doteq 7.3077 \notin \langle 3, 6 \rangle$$
   $\Rightarrow$ jedná se o zobrazení do sebe
3. $|g'(3)| \doteq |0.7647| < 1$
   $|g'(6)| \doteq |0.1540| < 1$
   Má funkce $g'(t)$ na intervalu $\langle 3, 6 \rangle$ extrém?
   $$g''(t) = \frac{gm}{gm - cv}\left(e^{-\frac{c}{m}t} \cdot \frac{-c}{m}\left(1 - \frac{c}{m}t\right) + e^{-\frac{c}{m}t} \cdot \frac{-c}{m}\right) = 0$$
   $$\frac{gm}{gm - cv} \cdot \frac{-c}{m}\left(2 - \frac{c}{m}t\right) e^{-\frac{c}{m}t} = 0$$
   $$2 - \frac{c}{m}t = 0 \vee e^{-\frac{c}{m}t} = 0$$
   $$\text{může nastat pouze 1. situace: } 2 - \frac{c}{m}t = 0 \Rightarrow t = 2\frac{m}{c} \doteq 14.6154 \notin \langle 3, 6 \rangle$$
   $\Rightarrow$ platí $|g'(t)| < 1 \quad \forall t \in \langle 3, 6 \rangle$

Výpočet:

i	t_i	$t_{i+1} = g(t_i)$	$\lvert t_{i+1} - t_i \rvert$
0	3.0000	3.8920	0.8920
1	3.8920	4.4691	0.5770
2	4.4691	4.7420	0.2730
3	4.7420	4.8472	0.1052
4	4.8472	4.8839	0.0367
5	4.8839	4.8962	0.0123
6	4.8962	4.9003	0.0041
7	4.9003	4.9016	0.0013
8	4.9016	4.9021	0.0004 < 0.01

odhad řešení:

$$\hat{t} \doteq 4.9021$$

Zdroje:

[1] Chapra, S. C., Canale, R. *Numerical Methods for Engineers.* USA, 5 ed. 2006.
[2] http://www.shapesticker.eu/Samolepka-Parasutista-d49.htm?tab=description (září 2017)