

Příklad 1. Řešte systém lineárních rovnic

$$\begin{aligned}x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= -1 \\ -x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= -4\end{aligned}$$

- a) pomocí GEM bez výměny řádků,
b) pomocí GEM s částečným výběrem pivotu.

Řešení.

a) **GEM bez výměny řádků:**

- úprava na schodovitý tvar:

- LU rozklad matice soustavy:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

- řešení pomocí LU rozkladu:

1. řešení $L\vec{y} = \vec{b}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & -4 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -18 \end{pmatrix}$$

2. řešení $U\vec{x} = \vec{y}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Poznámka. Sami si můžete ověřit platnost rovnosti $A = L \cdot U$:

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & -4 \end{pmatrix} = A.$$

b) **GEM s částečným výběrem pívota:**

- úprava na schodovitý tvar:

- LU rozklad matice soustavy:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- permutační matice P

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- řešení pomocí LU rozkladu:

1. řešení $L\vec{y} = P\vec{b}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{y} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2. řešení $U\vec{x} = \vec{y}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & -4 & -4 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Poznámka. Ověření rovnosti $P \cdot A = L \cdot U$:

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešený příklad. Řešte systém lineárních rovnic

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 6 \\4x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 2 \\4x_1 + 6x_2 + 4x_3 &= 10\end{aligned}$$

- a) pomocí GEM bez výměny řádků,
b) pomocí GEM s částečným výběrem pivotu.

Řešení.

a) **GEM bez výměny řádků:**

- úprava na schodovitý tvar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- LU rozklad matice soustavy:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- řešení pomocí LU rozkladu:

1. řešení $L\vec{y} = \vec{b}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & \frac{1}{2} & 1 & 10 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{y} = \begin{pmatrix} 6 \\ -22 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2. řešení $U\vec{x} = \vec{y}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -4 & -6 & -22 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Poznámka. Ověření rovnosti $A = L \cdot U$:

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix} = A.$$

b) **GEM s částečným výběrem pivotu:**

- úprava na schodovitý tvar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- LU rozklad matice soustavy:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- permutační matice P

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- řešení pomocí LU rozkladu:

1. řešení $L\vec{y} = P\vec{b}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 10 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 6 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

2. řešení $U\vec{x} = \vec{y}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array} \right) \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Poznámka Ověření rovnosti $P \cdot A = L \cdot U$:

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$