KLASICKÁ FORMULACE ÚLOHY.
Pro danou konstantu $a^2 > 0$ a funkce p, q, $f \in C\langle 0, l\rangle$, $q \geq 0$, najděte funkci $y \in C^2\langle 0, l\rangle$ tak, aby byla splněna diferenciální rovnice

$$-a^2y'' + py' + qy = f \text{ pro } x \in (0, l) \tag{1}$$

a okrajové podmínky

- Dirichletovy: $y(0) = \alpha_0$, $y(l) = \alpha_l$,
- Neumannovy: $a^2y'(0) = \beta_0$, $-a^2y'(l) = \beta_l$,
- Newtonovy: $a^2y'(0) = \gamma_0 y(0) + \beta_0$, $-a^2y'(l) = \gamma_l y(l) + \beta_l$,

kde $\gamma_0 > 0$, $\gamma_l > 0$. Typy okrajových podmínek lze v hraničních bodech 0 a l libovolně kombinovat.

STANDARDNÍ METODA SÍTÍ

- diskretizace úlohy:
  ekvidistantní uzly: $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = l$,
  krok: $h = \frac{l}{n}$,
  aproximace přesné hodnoty $y(x_i)$: y_i, $i = 0, 1, \ldots, n$
- aproximace v případě vnitřních uzlů, tj. $i = 1, 2, \ldots, n - 1$:

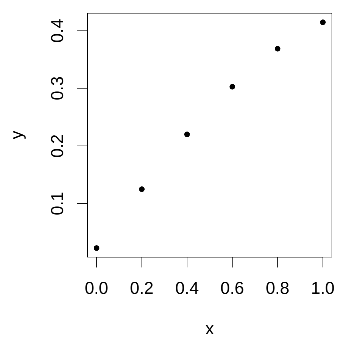
$$\begin{aligned} y(x_i) &\text{ aproximujeme } y_i \\ y'(x_i) &\text{ aproximujeme } \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \\ y''(x_i) &\text{ aproximujeme } \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} \end{aligned}$$

  dosazením aproximací do (1) získáme soustavu $n - 1$ lineárních rovnic
- zbývající 2 rovnice:
  – Dirichletovy okrajové podmínky: dosadíme do vytvořeného systému $n - 1$ lineárních rovnic a řešíme,
  – Neumannovy a Newtonovy okrajové podmínky: nahrazením derivací centrálními diferencemi zavedeme fiktivní „přibližné hodnoty“ y_{-1} a y_{n+1}, které vyeliminujeme, a řešíme systém n lineárních rovnic v případě Neumannových podmínek, resp. $n + 1$ lineárních rovnic v případě Newtonových podmínek.

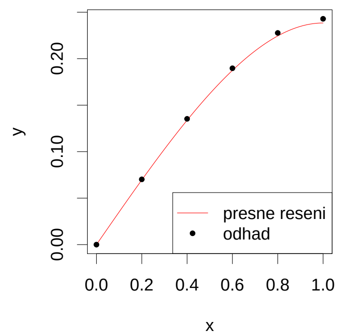
Příklad 1. Aproximujte řešení úlohy

$$\begin{aligned} -y'' + xy &= x \text{ na intervalu } (0, 1) \\ y(0) - 2y'(0) &= -1 \\ 2y(1) + y'(1) &= 1 \end{aligned}$$

s krokem $h = 0.2$.



Řešení.



Příklad 2. Aproximujte řešení úlohy

$$\begin{aligned} -y'' + y &= x \text{ na intervalu } (0,1) \\ y(0) &= 0 \\ y'(1) &= 0 \end{aligned}$$

s krokem $h = 0.2$.

Řešení.
$h = 0.2$, $n = \frac{l}{h} = 5$, $i = 0, 1, \ldots, 5$, $x_i = h \cdot i \Rightarrow x_i = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$
náhrada:

$$\begin{aligned} y(x_i) &\longrightarrow y_i \\ y'(x_i) &\longrightarrow \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \\ y''(x_i) &\longrightarrow \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} \end{aligned}$$

dosazením do zadání dostáváme:

$$\begin{aligned} -\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + y_i &= x_i \quad /h^2, \text{ tj. } \cdot 0.2^2 \\ -y_{i+1} + 2y_i - y_{i-1} + 0.2^2 y_i &= 0.2^2 \cdot i\, h \\ -y_{i-1} + 2.04 y_i - y_{i+1} &= 0.008\, i \end{aligned} \tag{2}$$

- pro $i = 1, 2, 3, 4$ dostáváme:
  $i = 1$: $\quad -y_0 + 2.04\, y_1 - y_2 = 0.008$

  $i = 2$: $\quad -y_1 + 2.04\, y_2 - y_3 = 0.016$

  $i = 3$: $\quad -y_2 + 2.04\, y_3 - y_4 = 0.024$

  $i = 4$: $\quad -y_3 + 2.04\, y_4 - y_5 = 0.032$
- pro $i = 0$: $y_0 = 0$
- pro $i = 5$: nahrazení $y'(x_5)$ centrální diferencí:

$$\begin{aligned} y'(x_5) = \frac{y_6 - y_4}{2 \cdot h} = \frac{y_6 - y_4}{2 \cdot 0.2} &= 0 \\ y_6 - y_4 &= 0 \end{aligned}$$

... vytvoření fiktivní proměnné y_6, kterou je potřeba eliminovat $\longrightarrow$ přidáme rovnici (2) dosazením $i = 5$:

$$-y_4 + 2.04\, y_5 - y_6 = 0.04$$

Řešením systému posledních dvou lineárních rovnic eliminujeme proměnnou y_6:

$$\begin{aligned} -y_4 + y_6 &= 0 \\ -y_4 + 2.04\, y_5 - y_6 &= 0.04 \\ \hline -2\, y_4 + 2.04\, y_5 &= 0.04 \end{aligned}$$

soustava lineárních rovnic:

$$\begin{pmatrix} 2.04 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2.04 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2.04 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2.04 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2.04 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.008 \\ 0.016 \\ 0.024 \\ 0.032 \\ 0.04 \end{pmatrix}$$

výsledný odhad:

$$\overrightarrow{y} = (0, 0.0702, 0.1353, 0.1897, 0.2277, 0.2429)^T$$