NEWTONOVA METODA PRO ŘEŠENÍ SYSTÉMU DVOU NELINEÁRNÍCH ROVNIC

- je dána soustava dvou nelineárních rovnic o dvou neznámých

$$f_1(x_1, x_1) = 0$$
$$f_2(x_1, x_2) = 0$$

- vektorový zápis soustavy: $F(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{0} = (0,0)^T \in \mathbb{R}^2$
- ekvivalence úloh: $F(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = G(\boldsymbol{x})$, kde $G(\boldsymbol{x})$ je iterační matice tvaru

$$G(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - J_F^{-1}(\boldsymbol{x})F(\boldsymbol{x}), \text{ kde } J_F(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

  se nazývá Jacobiova matice funkce F.

- iterační vztah:

$$\boldsymbol{x}^{(i+1)} = \boldsymbol{x}^{(i)} - J_F^{-1}(\boldsymbol{x}^{(i)})F(\boldsymbol{x}^{(i)}),\ i = 0, 1, 2, \ldots.$$

- postup pro výpočet:
  1. označme $\boldsymbol{d}^{(i)} = \boldsymbol{x}^{(i+1)} - \boldsymbol{x}^{(i)}$
  2. $J_F(\boldsymbol{x}^{(i)})\boldsymbol{d}^{(i)} = -F(\boldsymbol{x}^{(i)}) \longrightarrow$ výpočet $\boldsymbol{d}^{(i)}$
  3. dosazení do iteračního vztahu: $\boldsymbol{x}^{(i+1)} = \boldsymbol{x}^{(i)} + \boldsymbol{d}^{(i)}$

Příklad 1. Newtonovou metodou řešte systém nelineárních rovnic

$$2x - \mathrm{e}^y + 2 = 0$$
$$\mathrm{e}^x + y - 1 = 0.$$

Počítejte s počáteční aproximací $\boldsymbol{x}^{(0)} = (0,0)^T$ a přesností $\varepsilon = 0.001$.

Řešení.

Souhrnné výsledky (výsledky jsou uvedeny pro použití různých typů norem):

i	$x^{(i)}$	$y^{(i)}$	$d_1^{(i)}$	$d_2^{(i)}$	$\lVert \boldsymbol{d}^{(i)} \rVert_\infty$	$x^{(i+1)}$	$y^{(i+1)}$
0	0.0000	0.0000	−0.3333	0.3333	0.3333	−0.3333	0.3333
1	−0.3333	0.3333	−0.0025	−0.0481	0.0481	−0.3358	0.2852
2	−0.3358	0.2852	0.0006	−0.0004	$0.0006 < 0.001$	−0.3352	0.2848

$$\Rightarrow \hat{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -0.3352 \\ 0.2848 \end{pmatrix}$$

i	$x^{(i)}$	$y^{(i)}$	$d_1^{(i)}$	$d_2^{(i)}$	$\lVert \boldsymbol{d}^{(i)} \rVert_1$	$x^{(i+1)}$	$y^{(i+1)}$
0	0.0000	0.0000	−0.3333	0.3333	0.6666	−0.3333	0.3333
1	−0.3333	0.3333	−0.0025	−0.0481	0.0506	−0.3358	0.2852
2	−0.3358	0.2852	0.0006	−0.0004	$0.0010 \leq 0.001$	−0.3352	0.2848

$$\Rightarrow \hat{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -0.3352 \\ 0.2848 \end{pmatrix}$$

i	$x^{(i)}$	$y^{(i)}$	$d_1^{(i)}$	$d_2^{(i)}$	$\lVert \boldsymbol{d}^{(i)} \rVert_2$	$x^{(i+1)}$	$y^{(i+1)}$
0	0.0000	0.0000	−0.3333	0.3333	0.4714	−0.3333	0.3333
1	−0.3333	0.3333	−0.0025	−0.0481	0.0482	−0.3358	0.2852
2	−0.3358	0.2852	0.0006	−0.0004	$0.0007 < 0.001$	−0.3352	0.2848

$$\Rightarrow \hat{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -0.3352 \\ 0.2848 \end{pmatrix}$$

Příklad 2. Newtonovou metodou řešte systém nelineárních rovnic

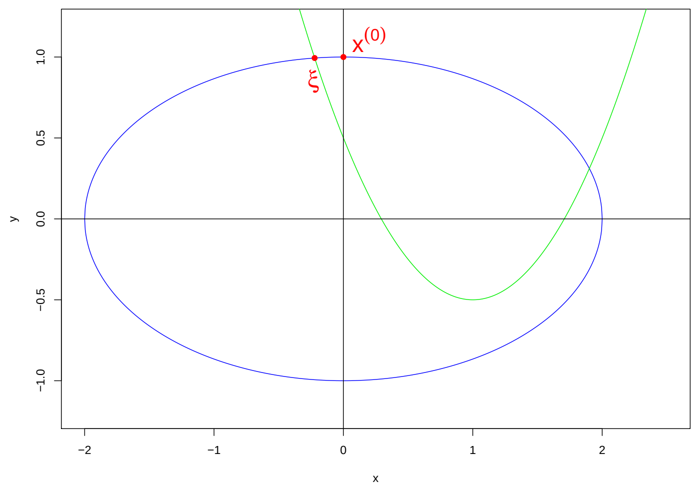
$$x^2 - 2x - y + \frac{1}{2} = 0$$
$$x^2 + 4y^2 - 4 = 0.$$

Počítejte s počáteční aproximací $\boldsymbol{x}^{(0)} = (0, 1)^T$ a přesností $\varepsilon = 0.001$.

Řešení.

- Úprava na rovnic systému na středový tvar:

$$x^2 - 2x - y + \frac{1}{2} = (x-1)^2 - y - \frac{1}{2} = 0 \to y = (x-1)^2 - \frac{1}{2} \text{ ... rovnice paraboly}$$
$$x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \to x^2 + 4y^2 = 4 \to \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \text{ ... elipsa: } S = [0,0], a = 2, b = 1$$



- Jacobiova matice:

$$\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} = 2x - 2$$
$$\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} = -1$$
$$\frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} = 2x \qquad \Rightarrow J_F(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 2x-2 & -1 \\ 2x & 8y \end{pmatrix}$$
$$\frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y} = 8y$$

- Výpočet $\boldsymbol{x}^{(1)}$:

$$J_F(\boldsymbol{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \; F(\boldsymbol{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Řešíme systém $J_F(\boldsymbol{x}^{(0)})\boldsymbol{d}^{(0)} = -F(\boldsymbol{x}^{(0)})$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 8 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \boldsymbol{d}^{(0)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Výpočet aproximace $\boldsymbol{x}^{(1)}$:

$$\boldsymbol{d}^{(0)} = \boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(0)} \to \boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{d}^{(0)} + \boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Výpočet $\boldsymbol{x}^{(2)}$:

$$J_F(\boldsymbol{x}^{(1)}) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 8 \end{pmatrix}, \; F(\boldsymbol{x}^{(1)}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

Řešíme systém $J_F(\boldsymbol{x}^{(1)})\boldsymbol{d}^{(1)} = -F(\boldsymbol{x}^{(1)})$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{2} & 8 & -\frac{1}{16} \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0.0274 \\ 0 & 1 & -0.0061 \end{array}\right) \Rightarrow \boldsymbol{d}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.0274 \\ -0.0061 \end{pmatrix}$$

Výpočet aproximace $\boldsymbol{x}^{(2)}$:

$$\boldsymbol{d}^{(1)} = \boldsymbol{x}^{(2)} - \boldsymbol{x}^{(1)} \to \boldsymbol{x}^{(2)} = \boldsymbol{d}^{(1)} + \boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.0274 \\ -0.0061 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2226 \\ 0.9939 \end{pmatrix}$$

- Výpočet $\boldsymbol{x}^{(3)}$ analogický

- Souhrnné výsledky (výsledky jsou uvedeny pro použití různých typů norem):

i	$x^{(i)}$	$y^{(i)}$	$d_1^{(i)}$	$d_2^{(i)}$	$\Vert \boldsymbol{d}^{(i)} \Vert_\infty$	$x^{(i+1)}$	$y^{(i+1)}$
0	0.0000	1.0000	−0.2500	0.0000	0.2500	−0.2500	1.0000
1	−0.2500	1.0000	0.0274	−0.0061	0.0274	−0.2226	0.9939
2	−0.2226	0.9939	0.0004	−0.0001	$0.0004 < 0.001$	−0.2222	0.9938

$$\Rightarrow \hat{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -0.2222 \\ 0.9938 \end{pmatrix}$$

i	$x^{(i)}$	$y^{(i)}$	$d_1^{(i)}$	$d_2^{(i)}$	$\Vert \boldsymbol{d}^{(i)} \Vert_1$	$x^{(i+1)}$	$y^{(i+1)}$
0	0.0000	1.0000	−0.2500	0.0000	0.2500	−0.2500	1.0000
1	−0.2500	1.0000	0.0274	−0.0061	0.0335	−0.2226	0.9939
2	−0.2226	0.9939	0.0004	−0.0001	$0.0005 < 0.001$	−0.2222	0.9938

$$\Rightarrow \hat{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -0.2222 \\ 0.9938 \end{pmatrix}$$

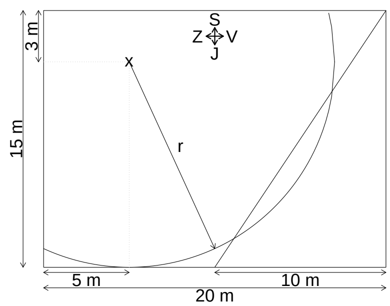
i	$x^{(i)}$	$y^{(i)}$	$d_1^{(i)}$	$d_2^{(i)}$	$\Vert \boldsymbol{d}^{(i)} \Vert_2$	$x^{(i+1)}$	$y^{(i+1)}$
0	0.0000	1.0000	−0.2500	0.0000	0.2500	−0.2500	1.0000
1	−0.2500	1.0000	0.0274	−0.0061	0.0281	−0.2226	0.9939
2	−0.2226	0.9939	0.0004	−0.0001	$0.0004 < 0.001$	−0.2222	0.9938

$$\Rightarrow \hat{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -0.2222 \\ 0.9938 \end{pmatrix}$$

Řešený příklad z praxe.

Babička má obdélníkovou zahradu o délce 20 m a šířce 15 m. V jihovýchodním cípu zahrady se nachází zeleninová zahrádka ve tvaru pravoúhlého trojúhelníka. Kratší strany zahrádky jsou tvořeny celou východní stranou zahrady a polovinou jižní strany. Ve vzdálenosti 3 m od severní strany a 5 m od západní strany se nachází strom, u kterého je na 12 m dlouhém laně přivázána hladová koza.
Pomůžete babičce zjistit, zda může koza spást část úrody na zahrádce? Počítejte s přesností $\varepsilon = 0.01$.

Řešení.
Nákres zahrady:



- středový tvar rovnice kružnice:

$$(x-5)^2 + (y-12)^2 = 12^2$$

- rovnice přímky:

$$y = \frac{3}{2}x - 15$$

Řešíme systém nelineárních rovnic

$$\begin{aligned} (x-5)^2 + (y-12)^2 - 12^2 &= 0 \\ -\frac{3}{2}x + y + 15 &= 0 \end{aligned}$$

- Jacobiova matice:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} &= 2(x-5) \\ \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} &= 2(y-12) \\ \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} &= -\frac{3}{2} \\ \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y} &= 1 \end{aligned} \qquad \Rightarrow J_F(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 2(x-5) & 2(y-12) \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

- iterační proces (výsledky pro různé typy norem)

i	$x^{(i)}$	$y^{(i)}$	$d_1^{(i)}$	$d_2^{(i)}$	$\Vert \boldsymbol{d}^{(i)} \Vert_\infty$	$x^{(i+1)}$	$y^{(i+1)}$
0	0	0	8.3696	-2.4457	8.3696	8.3696	-2.4457
1	8.3696	-2.4457	2.0774	3.1162	3.1162	10.4470	0.6705
2	10.4470	0.6705	0.6074	0.9111	0.9111	11.0544	1.5816
3	11.0544	1.5816	0.0626	0.0939	0.0939	11.1170	1.6755
4	11.1170	1.6755	0.0007	0.0010	0.0010 < 0.01	11.1177	1.6765

$$\Rightarrow \hat{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 11.1177 \\ 1.6765 \end{pmatrix}$$

i	$x^{(i)}$	$y^{(i)}$	$d_1^{(i)}$	$d_2^{(i)}$	$\Vert \boldsymbol{d}^{(i)} \Vert_1$	$x^{(i+1)}$	$y^{(i+1)}$
0	0	0	8.3696	-2.4457	10.8153	8.3696	-2.4457
1	8.3696	-2.4457	2.0774	3.1162	5.1936	10.4470	0.6705
2	10.4470	0.6705	0.6074	0.9111	1.5185	11.0544	1.5816
3	11.0544	1.5816	0.0626	0.0939	0.1565	11.1170	1.6755
4	11.1170	1.6755	0.0007	0.0010	0.0017< 0.01	11.1177	1.6765

$$\Rightarrow \hat{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 11.1177 \\ 1.6765 \end{pmatrix}$$

i	$x^{(i)}$	$y^{(i)}$	$d_1^{(i)}$	$d_2^{(i)}$	$\parallel \boldsymbol{d}^{(i)} \parallel_2$	$x^{(i+1)}$	$y^{(i+1)}$
0	0	0	8.3696	-2.4457	8.7196	8.3696	-2.4457
1	8.3696	-2.4457	2.0774	3.1162	3.7452	10.4470	0.6705
2	10.4470	0.6705	0.6074	0.9111	1.0950	11.0544	1.5816
3	11.0544	1.5816	0.0626	0.0939	0.1129	11.1170	1.6755
4	11.1170	1.6755	0.0007	0.0010	$0.0012 < 0.01$	11.1177	1.6765

$$\Rightarrow \hat{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 11.1177 \\ 1.6765 \end{pmatrix}$$