ITERAČNÍ METODY PRO ŘEŠENÍ SYSTÉMŮ LINEÁRNÍCH ROVNIC

Budeme se zabývat řešením soustavy lineárních rovnic

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

s regulární maticí soustavy A.
Princip iteračních metod: převést soustavu $A\vec{x} = \vec{b}$ na systém $\vec{x} = T\vec{x} + \vec{d}$ s iterační maticí T.
Iterační proces:

$$\vec{x}^{(i+1)} = T\vec{x}^{(i)} + \vec{d},$$

vhodnou volbou iterační matice T a vektoru $\vec{d}$ dostáváme konkrétní iterační metodu.
STOP podmínka:

$$\|\vec{x}^{(i+1)} - \vec{x}^{(i)}\|_* < \varepsilon, \text{ kde } * \in \{\infty, 1, 2\}$$

Rozklad matice soustavy A:

$$A = D + L + U,$$

kde D značí diagonální matici, L dolní trojúhelníkovou matici bez diagonály a U horní trojúhelníkovou matici bez diagonály:

$$D = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

JACOBIOVA ITERAČNÍ METODA

Soustavu

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

řešíme rozkladem matice $A = D + L + U$. Postupnými úpravami

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= \vec{b} \\ (D + L + U)\vec{x} &= \vec{b} \\ D\vec{x} &= -(L + U)\vec{x} + \vec{b} \\ \vec{x} &= -D^{-1}(L + U)\vec{x} + D^{-1}\vec{b} \end{aligned}$$

dostáváme iterační proces ve tvaru

$$\vec{x}^{(i+1)} = \underbrace{-D^{-1}(L + U)}_{T_J}\vec{x}^{(i)} + \underbrace{D^{-1}\vec{b}}_{\vec{d}_J}$$

s iterační maticí T_J.

GAUSSOVA-SEIDELOVA ITERAČNÍ METODA

Soustavu

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

řešíme rozkladem matice $A = D + L + U$. Postupnými úpravami

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= \vec{b} \\ (D + L + U)\vec{x} &= \vec{b} \\ (D + L)\vec{x} &= -U\vec{x} + \vec{b} \\ \vec{x} &= -(D + L)^{-1}U\vec{x} + (D + L)^{-1}\vec{b} \end{aligned}$$

dostáváme iterační proces ve tvaru

$$\vec{x}^{(i+1)} = \underbrace{-(D + L)^{-1}U}_{T_{GS}}\vec{x}^{(i)} + \underbrace{(D + L)^{-1}\vec{b}}_{\vec{d}_{GS}}$$

s iterační maticí T_{GS}.

Konvergence metod:

- A ryze řádkově diagonálně dominantní:

$$|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}| \quad i = 1, \ldots, n$$

A - ryze řádkově diagonálně dominantní $\Rightarrow$ konvergence pro libovolnou počáteční aproximaci $\vec{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Pozn. A ryze sloupcově diagonálně dominantní: $|a_{i,i}| > \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{i,j}| \quad j = 1, \ldots, n$

- Iterační posloupnost $\vec{x}^{(i)}$ konverguje k přesnému řešení systému lineárních rovnic, existuje-li norma matic $\|\cdot\|$ souhlasná s normou vektorů tak, že $\|T\| < 1$.

Příklad 1. Danou soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 \; + x_3 \; &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \; &= 4 \\ -x_1 - x_2 \; - 3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

řešte Jacobiovou i Gaussovou-Seidelovou metodou. Zvolte počáteční aproximaci $\vec{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ a $\varepsilon = 0.001$.

Řešení.

- Jacobiova metoda:

i	x_1^i	$x_2^{(i)}$	$x_3^{(i)}$	$\|\cdot\|_\infty$
0	0	0	0	–
1	0.6667	1.0000	0.3333	1.0000
2	0.2222	0.5833	-0.2222	0.5555
3	0.5463	0.9445	0.0648	0.3612
$\vdots$				
19	0.4234	0.8081	-0.0766	0.0009

$$\hat{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0.4234 \\ 0.8081 \\ -0.0766 \end{pmatrix}$$

i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$x_3^{(i)}$	$\|\cdot\|_1$
0	0	0	0	–
1	0.6667	1.0000	0.3333	2.0000
2	0.2222	0.5833	-0.2222	1.4167
3	0.5463	0.9445	0.0648	0.9723
$\vdots$				
22	0.4230	0.8076	-0.0770	0.0007

$$\hat{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0.4230 \\ 0.8076 \\ -0.0770 \end{pmatrix}$$

i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$x_3^{(i)}$	$\|\cdot\|_2$
0	0	0	0	–
1	0.6667	1.0000	0.3333	1.2472
2	0.2222	0.5833	-0.2222	0.8245
3	0.5463	0.9445	0.0648	0.5638
$\vdots$				
21	0.4232	0.8079	-0.0768	0.0007

$$\hat{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0.4232 \\ 0.8079 \\ -0.0768 \end{pmatrix}$$

- Gaussova-Seidelova metoda:

i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$x_3^{(i)}$	$\|\cdot\|_\infty$
0	0	0	0	–
1	0.6667	0.6667	-0.1111	0.6667
2	0.4815	0.7870	-0.0895	0.1852
3	0.4342	0.8053	-0.0798	0.0473
4	0.4248	0.8075	-0.0775	0.0094
5	0.4233	0.8077	-0.0770	0.0015
6	0.4231	0.8077	-0.0769	0.0002

$$\hat{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0.4231 \\ 0.8077 \\ -0.0769 \end{pmatrix}$$

i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$x_3^{(i)}$	$\|\cdot\|_1$
0	0	0	0	–
1	0.6667	0.6667	-0.1111	1.4445
2	0.4815	0.7870	-0.0895	0.3271
3	0.4342	0.8053	-0.0798	0.0753
4	0.4248	0.8075	-0.0775	0.0139
5	0.4233	0.8077	-0.0770	0.0022
6	0.4231	0.8077	-0.0769	0.0003

$$\hat{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0.4231 \\ 0.8077 \\ -0.0769 \end{pmatrix}$$

i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$x_3^{(i)}$	$\|\cdot\|_2$
0	0	0	0	–
1	0.6667	0.6667	-0.1111	0.9494
2	0.4815	0.7870	-0.0895	0.2219
3	0.4342	0.8053	-0.0798	0.0516
4	0.4248	0.8075	-0.0775	0.0099
5	0.4233	0.8077	-0.0770	0.0016
6	0.4231	0.8077	-0.0769	0.0002

$$\hat{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0.4231 \\ 0.8077 \\ -0.0769 \end{pmatrix}$$

Příklad 2. Danou soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 10x_1 - 5x_2 \ + 4x_3 &= 3 \\ x_1 - 10x_2 + 12x_3 &= -5 \\ x_1 - 8x_2 \ + 5x_3 &= -13 \end{aligned}$$

řešte Jacobiovou i Gaussovou-Seidelovou metodou. Zvolte počáteční aproximaci $\overrightarrow{x}^{(0)} = (0,0,0)^T$ a $\varepsilon = 0.1$.

Řešení.
Matice soustavy

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 4 \\ 1 & -10 & 12 \\ 1 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

není ryze řádkově ani sloupcově diagonálně dominantní,
$\Rightarrow$ budeme uvažovat matici soustavy $A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -5 \\ 1 & 12 & -10 \\ 1 & 5 & -8 \end{pmatrix}$ a vektor pravé strany $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -13 \end{pmatrix}$. Řešíme soustavu lineárních rovnic $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ s vektorem řešení $\overrightarrow{x} = (x,y,z)^T$, kde $x = x_1$, $y = x_3$ a $z = x_2$. Nově vzniklá matice soustavy (z původní soustavy vznikla výměnou proměnných x_2 a x_3) je již ryze řádkově diagonálně dominantní ($10 > 4 + 5$, $12 > 1 + 10$, $8 > 1 + 5$), dále řešíme iteračními metodami.

- $\boxed{\text{Jacobiova metoda:}}$

Řešíme systém linárních rovnic

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^{(i+1)} \\ y^{(i+1)} \\ z^{(i+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 5 \\ -1 & 0 & 10 \\ -1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^{(i)} \\ y^{(i)} \\ z^{(i)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -13 \end{pmatrix}$$

Iterační proces:

i	$x^{(i)}$	$y^{(i)}$	$z^{(i)}$	$\Vert\cdot\Vert_\infty$	i	$x^{(i)}$	$y^{(i)}$	$z^{(i)}$	$\Vert\cdot\Vert_1$	i	$x^{(i)}$	$y^{(i)}$	$z^{(i)}$	$\Vert\cdot\Vert_2$
0	0	0	0	–	0	0	0	0	–	0	0	0	0	–
1	0.3000	-0.4167	1.6250	1.6250	1	0.3000	-0.4167	1.6250	2.3417	1	0.3000	-0.4167	1.6250	1.7042
2	1.2792	0.9125	1.4021	1.3292	2	1.2792	0.9125	1.4021	2.5313	2	1.2792	0.9125	1.4021	1.6659
3	0.6361	0.6451	2.3552	0.9531	3	0.6361	0.6451	2.3552	1.8636	3	0.6361	0.6451	2.3552	1.1805
4	1.2196	1.4930	2.1077	0.8479	4	1.2196	1.4930	2.1077	1.6789	4	1.2196	1.4930	2.1077	1.0586
5	0.7566	1.2381	2.7106	0.6029	5	0.7566	1.2381	2.7106	1.3208	5	0.7566	1.2381	2.7106	0.8018
$\vdots$					$\vdots$					$\vdots$				
15	0.9632	1.9434	3.0128	0.0780	20	1.0143	2.0100	2.9835	0.0916	17	0.9745	1.9643	3.0122	0.0902
	$\widehat{\overrightarrow{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9632 \\ 1.9434 \\ 3.0128 \end{pmatrix}$					$\widehat{\overrightarrow{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0143 \\ 2.0100 \\ 2.9835 \end{pmatrix}$					$\widehat{\overrightarrow{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9745 \\ 1.9643 \\ 3.0122 \end{pmatrix}$				

- $\boxed{\text{Gaussova-Seidelova metoda:}}$

Řešíme systém linárních rovnic

$$\begin{pmatrix}10 & 0 & 0\\ 1 & 12 & 0\\ 1 & 5 & -8\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x^{(i+1)}\\ y^{(i+1)}\\ z^{(i+1)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -4 & 5\\ 0 & 0 & 10\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x^{(i)}\\ y^{(i)}\\ z^{(i)}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\ -5\\ -13\end{pmatrix}$$

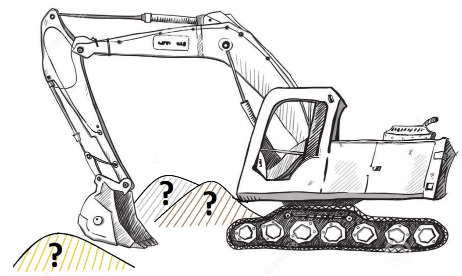
Iterační proces:

i	$x^{(i)}$	$y^{(i)}$	$z^{(i)}$	$\lVert\cdot\rVert_\infty$	i	$x^{(i)}$	$y^{(i)}$	$z^{(i)}$	$\lVert\cdot\rVert_1$	i	$x^{(i)}$	$y^{(i)}$	$z^{(i)}$	$\lVert\cdot\rVert_2$
0	0	0	0	–	0	0	0	0	–	0	0	0	0	–
1	0.3000	-0.4417	1.3865	1.3865	1	0.3000	-0.4417	1.3865	2.1282	1	0.3000	-0.4417	1.3865	1.4858
2	1.1699	0.6413	2.1720	1.0830	2	1.1699	0.6413	2.1720	2.7384	2	1.1699	0.6413	2.1720	1.5958
3	1.1295	1.2992	2.5782	0.6579	3	1.1295	1.2992	2.5782	1.1045	3	1.1295	1.2992	2.5782	0.7742
4	1.0694	1.6427	2.7854	0.3435	4	1.0694	1.6427	2.7854	0.6108	4	1.0694	1.6427	2.7854	0.4056
5	1.0356	1.8182	2.8908	0.1755	5	1.0356	1.8182	2.8908	0.3147	5	1.0356	1.8182	2.8908	0.2075
$\vdots$					$\vdots$					$\vdots$				
6	1.0181	1.9075	2.9444	0.0893	7	1.0092	1.9529	2.9717	0.0816	7	1.0092	1.9529	2.9717	0.0537
	$\widehat{\vec{x}} = \begin{pmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_3\\ \hat{x}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1.0181\\ 1.9075\\ 2.9444\end{pmatrix}$					$\widehat{\vec{x}} = \begin{pmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_3\\ \hat{x}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1.0092\\ 1.9529\\ 2.9717\end{pmatrix}$					$\widehat{\vec{x}} = \begin{pmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_3\\ \hat{x}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1.0092\\ 1.9529\\ 2.9717\end{pmatrix}$			

Řešený příklad z praxe.
Stavební inženýr požaduje pro realizaci svého projektu 4 800 m^3 písku, 5 800 m^3 jemného štěrkopísku a 5 700 m^3 hrubého štěrkopísku. Těžební společnost má k těžbě tohoto materiálu k dispozici tři jámy s následujícím zastoupením:

	písek [%]	hrubý štěrkopísek [%]	jemný štěrkopísek [%]
jáma č. 1	52	30	18
jáma č. 2	20	50	30
jáma č. 3	25	15	55

Kolik m^3 písku, jemného a hrubého štěrkopísku má být z každé jámy vytěženo, aby byly pokryty potřeby inženýra? Volte $\varepsilon = 0.01$ a řešte pomocí Jacobiovy i Gaussovy-Seidelovy metody.



Zdroj: [1] + vlastní úprava

Řešení.
Označme x, y a z množství materiálu, který má být (v tomto pořadí) vytěžen z první, druhé a třetí jámy. Dostáváme tak soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} \frac{52}{100}x + \frac{20}{100}y + \frac{25}{100}z &= 4800 \\ \frac{30}{100}x + \frac{50}{100}y + \frac{15}{100}z &= 5800 \\ \frac{18}{100}x + \frac{30}{100}y + \frac{55}{100}z &= 5700. \end{aligned}$$

Výpočet s maticí soustavy složené z přirozených čísel je pro nás pohodlnější, proto z ní vytkneme hodnotu $\frac{1}{100}$. Dostáváme novou soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 52x_1 + 20y_1 + 25z_1 &= 4800 \\ 30x_1 + 50y_1 + 15z_1 &= 5800 \\ 18x_1 + 30y_1 + 55z_1 &= 5700 \end{aligned}$$

s maticí soustavy

$$A = \begin{pmatrix} 52 & 20 & 25 \\ 30 & 50 & 15 \\ 18 & 30 & 55 \end{pmatrix},$$

kde $x_1 = \frac{x}{100}$, $y_1 = \frac{y}{100}$ a $z_1 = \frac{z}{100}$. Řešení získaná pomocí Jacobiovy a Gassovy-Seidelovy metody bude z tohoto důvodu potřeba na konci výpočtu ještě vynásobit hodnotou 100.
Matice A je ryze řádkově diagonálně dominantní ($52 > 20 + 25$, $50 > 30 + 15$, $55 > 18 + 30$), můžeme tedy pro libovolnou volbu počáteční aproximace odhadnout potřebné množství materiálu, které je třeba vytěžit z jam.
Volba počáteční aproximace:

$$\overrightarrow{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^T.$$

- $\boxed{\text{Jacobiova metoda:}}$

Řešíme systém linárních rovnic

$$\begin{pmatrix} 52 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 55 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(i+1)} \\ y_1^{(i+1)} \\ z_1^{(i+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -20 & -25 \\ -30 & 0 & -15 \\ -18 & -30 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ y_1^{(i)} \\ z_1^{(i)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4800 \\ 5800 \\ 5700 \end{pmatrix}$$

Iterační proces:

i	$x_1^{(i)}$	$y_1^{(i)}$	$z_1^{(i)}$	$\|\cdot\|_\infty$	i	$x_1^{(i)}$	$y_1^{(i)}$	$z_1^{(i)}$	$\|\cdot\|_1$	i	$x_1^{(i)}$	$y_1^{(i)}$	$z_1^{(i)}$	$\|\cdot\|_2$
0	0	0	0	–	0	0	0	0	–	0	0	0	0	–
1	92.308	116.000	103.636	116.000	1	92.308	116.000	103.636	311.944	1	92.308	116.000	103.636	180.879
2	-2.133	29.525	10.154	94.441	2	-2.133	29.525	10.154	274.399	2	-2.133	29.525	10.154	158.544
3	76.071	114.234	88.230	84.709	3	76.071	114.234	88.230	240.989	3	76.071	114.234	88.230	139.238
4	5.953	43.889	16.431	71.799	4	5.953	43.889	16.431	212.261	4	5.953	43.889	16.431	122.556
5	67.528	107.499	77.749	63.610	5	67.528	107.499	77.749	186.502	5	67.528	107.499	77.749	107.692
⋮					⋮					⋮				
74	39.072	78.072	48.257	0.009	82	39.075	78.075	48.259	0.009	78	39.074	78.074	48.258	0.009
	$\widehat{\vec{x}}_1 = \begin{pmatrix}39.072\\78.072\\48.257\end{pmatrix}$					$\widehat{\vec{x}}_1 = \begin{pmatrix}39.075\\78.075\\48.259\end{pmatrix}$					$\widehat{\vec{x}}_1 = \begin{pmatrix}39.074\\78.074\\48.258\end{pmatrix}$			

Množství vytěženého materiálu z první, druhé a třetí jámy je

$\|\cdot\|_\infty$	$\|\cdot\|_1$	$\|\cdot\|_2$
$\widehat{\vec{x}} = 100\,\widehat{\vec{x}}_1 = \begin{pmatrix}3\,907.2\\7\,807.2\\4\,825.7\end{pmatrix}$	$\widehat{\vec{x}} = 100\,\widehat{\vec{x}}_1 = \begin{pmatrix}3\,907.5\\7\,807.5\\4\,825.9\end{pmatrix}$	$\widehat{\vec{x}} = 100\,\widehat{\vec{x}}_1 = \begin{pmatrix}3\,907.4\\7\,807.4\\4\,825.8\end{pmatrix}$

- Gaussova-Seidelova metoda:

Řešíme systém linárních rovnic

$$\begin{pmatrix}52 & 0 & 0\\30 & 50 & 0\\18 & 30 & 55\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1^{(i+1)}\\y_1^{(i+1)}\\z_1^{(i+1)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -20 & -25\\0 & 0 & -15\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1^{(i)}\\y_1^{(i)}\\z_1^{(i)}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4800\\5800\\5700\end{pmatrix}$$

Iterační proces:

i	$x_1^{(i)}$	$y_1^{(i)}$	$z_1^{(i)}$	$\|\cdot\|_\infty$	i	$x_1^{(i)}$	$y_1^{(i)}$	$z_1^{(i)}$	$\|\cdot\|_1$	i	$x_1^{(i)}$	$y_1^{(i)}$	$z_1^{(i)}$	$\|\cdot\|_2$
0	0	0	0	–	0	0	0	0	–	0	0	0	0	–
1	92.308	60.615	40.364	92.308	1	92.308	60.615	40.364	193.287	1	92.308	60.615	40.364	117.576
2	49.589	74.138	46.969	42.719	2	49.589	74.138	46.969	62.847	2	49.589	74.138	46.969	45.293
3	41.212	77.182	48.049	8.376	3	41.212	77.182	48.049	12.502	3	41.212	77.182	48.049	8.978
4	39.522	77.872	48.226	1.691	4	39.522	77.872	48.226	2.557	4	39.522	77.872	48.226	1.834
5	39.171	78.029	48.255	0.351	5	39.171	78.029	48.255	0.537	5	39.171	78.029	48.255	0.385
⋮					⋮					⋮				
8	39.077	78.076	48.261	0.004	8	39.077	78.076	48.261	0.006	8	39.077	78.076	48.261	0.004
	$\widehat{\vec{x}}_1 = \begin{pmatrix}39.077\\78.076\\48.261\end{pmatrix}$					$\widehat{\vec{x}}_1 = \begin{pmatrix}39.077\\78.076\\48.261\end{pmatrix}$					$\widehat{\vec{x}}_1 = \begin{pmatrix}39.077\\78.076\\48.261\end{pmatrix}$			

Množství vytěženého materiálu z první, druhé a třetí jámy je

$\|\cdot\|_\infty$	$\|\cdot\|_1$	$\|\cdot\|_2$
$\widehat{\vec{x}} = 100\,\widehat{\vec{x}}_1 = \begin{pmatrix}3\,907.7\\7\,807.6\\4\,826.1\end{pmatrix}$	$\widehat{\vec{x}} = 100\,\widehat{\vec{x}}_1 = \begin{pmatrix}3\,907.7\\7\,807.6\\4\,826.1\end{pmatrix}$	$\widehat{\vec{x}} = 100\,\widehat{\vec{x}}_1 = \begin{pmatrix}3\,907.7\\7\,807.6\\4\,826.1\end{pmatrix}$

Zdroje:

[1] https://thumbs.dreamstime.com/z/doodle-excavator-drawing-vector-eps-34277567.jpg