

Příklad 2. Choleského metodou řešte systém lineárních rovnic

$$\begin{aligned}2x_1 + 8x_2 + 4x_3 &= 2 \\x_1 + 2x_2 + x_3 &= -2 \\x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 3.\end{aligned}$$

Řešení.

Protože matice soustavy A není symetrická, stačí zaměnit pořadí některých rovnic:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_3 &= -2 \\2x_1 + 8x_2 + 4x_3 &= 2 \\x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 3\end{aligned}$$

- ověření podmínek:

- A symetrická
- $|A_1| = 1 > 0$, $|A_2| = 4 > 0$, $|A_3| = 16 > 0$

- konstrukce matice U :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ u_{12} & u_{22} & 0 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

$$1 = u_{11}^2 \Rightarrow u_{11} = 1$$

$$2 = u_{11} \cdot u_{12} \Rightarrow u_{12} = 2$$

$$1 = u_{11} \cdot u_{13} \Rightarrow u_{13} = 1$$

$$8 = u_{12}^2 + u_{22}^2 \Rightarrow u_{22} = \sqrt{8 - u_{12}^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$4 = u_{12} \cdot u_{13} + u_{22} \cdot u_{23} \Rightarrow u_{23} = \frac{1}{u_{22}} (4 - u_{12} \cdot u_{13}) = \frac{1}{2} (4 - 2) = 1$$

$$6 = u_{13}^2 + u_{23}^2 + u_{33}^2 \Rightarrow u_{33} = \sqrt{6 - u_{13}^2 - u_{23}^2} = \sqrt{6 - 1 - 1} = 2$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- řešení systému $A\vec{x} = \vec{b}$:

1. řešení $U^T\vec{y} = \vec{b}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

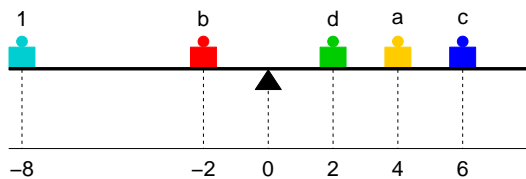
2. řešení $U\vec{x} = \vec{y}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

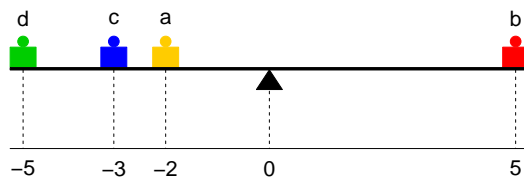
Řešený příklad z praxe.

Máme pět závaží, jedno z nich má hmotnost 1 kg. Chceme zjistit hmotnosti zbylých závaží. Experiment s tyčí zanedbatelné váhy vedl k těmto rovnovážným stavům:

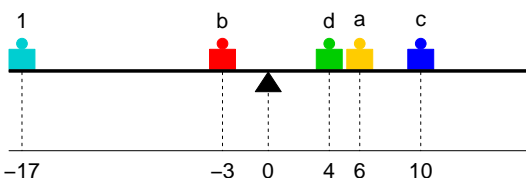
- 1. rovnovážný stav:



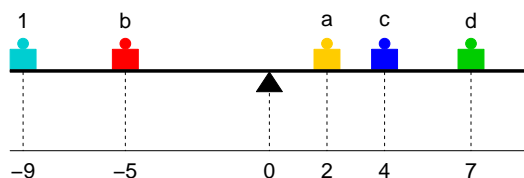
- 2. rovnovážný stav:



- 3. rovnovážný stav:



- 4. rovnovážný stav:



Řešte Choleského metodou.

Řešení.

K jednotlivým rovnovážným stavům sestavíme rovnice:

- 1. rovnovážný stav: $6c + 4a + 2d - 2b - 8 \cdot 1 = 0$
- 2. rovnovážný stav: $5b - 2a - 3c - 5d = 0$
- 3. rovnovážný stav: $10c + 6a + 4d - 3b - 17 \cdot 1 = 0$
- 4. rovnovážný stav: $7d + 4c + 2a - 5b - 9 \cdot 1 = 0$

Dostáváme systém lineárních rovnic:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 & 2 \\ -2 & 5 & -3 & -5 \\ 6 & -3 & 10 & 4 \\ 2 & -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 17 \\ 9 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}.$$

Ověření podmínek:

- A symetrická
- $|A_1| = 4 > 0$, $|A_2| = 16 > 0$, $|A_3| = 16 > 0$, $|A_4| = 16 > 0 \implies A$ je pozitivně definitní

Konstrukce matice U :

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 & 2 \\ -2 & 5 & -3 & -5 \\ 6 & -3 & 10 & 4 \\ 2 & -5 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & 0 & 0 \\ u_{12} & u_{22} & 0 & 0 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & 0 \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & u_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = u_{11}^2 \rightarrow u_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2 \rightarrow \boxed{u_{11} = 2}$$

$$a_{12} = u_{11} \cdot u_{12} \rightarrow u_{12} = \frac{a_{12}}{u_{11}} = \frac{-2}{2} = -1 \rightarrow \boxed{u_{12} = -1}$$

$$a_{13} = u_{11} \cdot u_{13} \rightarrow u_{13} = \frac{a_{13}}{u_{11}} = \frac{6}{2} = 3 \rightarrow \boxed{u_{13} = 3}$$

$$a_{14} = u_{11} \cdot u_{14} \rightarrow u_{14} = \frac{a_{14}}{u_{11}} = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow \boxed{u_{14} = 1}$$

$$a_{22} = u_{12}^2 + u_{22}^2 \rightarrow u_{22}^2 = a_{22} - u_{12}^2 = 5 - 1 \rightarrow \boxed{u_{22} = 2}$$

$$a_{23} = u_{12} \cdot u_{13} + u_{22} \cdot u_{23} \rightarrow u_{23} = \frac{a_{23} - u_{12} \cdot u_{13}}{u_{22}} = \frac{-3 - (-1) \cdot 3}{2} = 0 \rightarrow \boxed{u_{23} = 0}$$

$$a_{24} = u_{12} \cdot u_{14} + u_{22} \cdot u_{24} \rightarrow u_{24} = \frac{a_{24} - u_{12} \cdot u_{14}}{u_{22}} = \frac{-5 - (-1) \cdot 1}{2} = -2 \rightarrow \boxed{u_{24} = -2}$$

$$a_{33} = u_{13}^2 + u_{23}^2 + u_{33}^2 \rightarrow u_{33}^2 = a_{33} - u_{13}^2 - u_{23}^2 = 10 - 9 - 0 = 1 \rightarrow u_{33} = 1 \rightarrow \boxed{u_{33} = 1}$$

$$a_{34} = u_{13} \cdot u_{14} + u_{23} \cdot u_{24} + u_{33} \cdot u_{34} \rightarrow u_{34} = \frac{a_{34} - u_{13} \cdot u_{14} - u_{23} \cdot u_{24}}{u_{33}} = \frac{4 - 3 \cdot 1 - 0}{1} = 1 \rightarrow \boxed{u_{34} = 1}$$

$$a_{44} = u_{14}^2 + u_{24}^2 + u_{34}^2 + u_{44}^2 \rightarrow u_{44}^2 = a_{44} - u_{14}^2 - u_{24}^2 - u_{34}^2 \rightarrow u_{44} = \sqrt{7 - 1 - 4 - 1} = 1 \rightarrow \boxed{u_{44} = 1}$$

$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, U^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení systémů:

- řešení systému $U^T \vec{y} = \vec{b}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 17 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 9 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- řešení systému $U \vec{x} = \vec{y}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$