

## NORMA VEKTORU A MATICE

- nezáporné číslo charakterizující velikost prvků matice (vektoru)

**Značení.**

$a_{ij}$  ... prvek na  $i$ -tém řádku a  $j$ -tém sloupci matice  $A$

$x_i$  ...  $i$ -tý prvek vektoru  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

- normy vektorů:

$$\|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

$$\|\vec{x}\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

- normy matic:

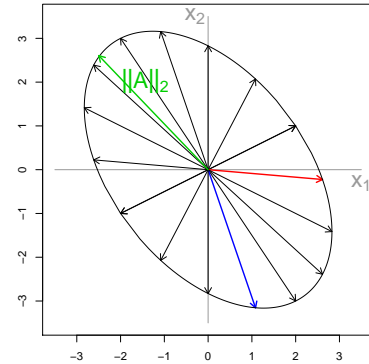
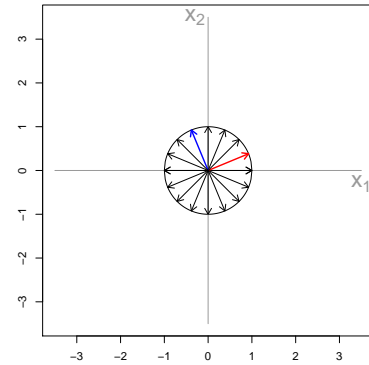
$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad \dots \text{maximum sloupcových součtů}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^m |a_{ij}| \quad \dots \text{maximum řádkových součtů}$$

$$\|A\|_F = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \dots \text{Frobeniova norma}$$

- podmínka souhlasnosti:

$$\|A\vec{x}\| \leq \|A\| \cdot \|\vec{x}\|$$

**Příklad 1.**

Spočítejte normy matice  $A$  a vektoru  $\vec{x}$  a ověřte podmínku souhlasnosti:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Příklad 2.**

Pro danou matici  $A$  a vektor  $\vec{x}$  spočítejte normy a ověřte podmínku souhlasnosti:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ -2 & -1 & 5 & -5 \\ 0 & 6 & -2 & 8 \\ -8 & 0 & -5 & -1 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

**Řešení.**

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ -2 & -1 & 5 & -5 \\ 0 & 6 & -2 & 8 \\ -8 & 0 & -5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ -24 \\ 4 \\ -15 \end{pmatrix}$$

- $\|\mathbf{x}\|_1 = 12$   
 $\|A\vec{x}\|_1 = 60$   
 $\|A\|_1 = \max\{11, 7, 15, 18\} = 18$   
 podmínka souhlasnosti:  $60 \leq 18 \cdot 12$
- $\|\vec{x}\|_\infty = 5$   
 $\|A\vec{x}\|_\infty = 24$   
 $\|A\|_\infty = \max\{8, 13, 16, 14\} = 16$   
 podmínka souhlasnosti:  $24 \leq 16 \cdot 5$
- $\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{4 + 25 + 1 + 16} = \sqrt{46}$   
 $\|A\vec{x}\|_2 = \sqrt{289 + 576 + 16 + 225} = \sqrt{1106}$   
 $\|A\|_F = \sqrt{1 + 9 + 16 + 4 + 1 + 25 + 25 + 36 + 4 + 64 + 64 + 25 + 1} = \sqrt{275}$   
 podmínka souhlasnosti:  $\sqrt{1106} \leq \sqrt{275} \cdot \sqrt{46}$