

- | | |
|--|--|
| <p>1. $\int \frac{1}{x \ln 3x} dx$</p> <p>2. $\int \operatorname{tg}^2 x dx$</p> <p>3. $\int \sin^2 \frac{3x+1}{4} dx$</p> <p>4. $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x-1} dx$</p> <p>5. $\int (x^2+2x+3)e^{-x+1} dx$</p> <p>6. $\int e^{3x-2} \cos 5x dx$</p> <p>7. $\int x \cdot \operatorname{arctg}(3-x) dx$</p> <p>8. $\int x^2 \ln x^3 dx$</p> <p>9. $\int \ln(2-3x) dx$</p> <p>10. $\int \sqrt{x} \ln x dx$</p> <p>11. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$</p> <p>12. $\int \operatorname{arctg} 3x dx$</p> <p>13. $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx$</p> <p>14. $\int \frac{-e^{x-1}}{\sqrt{e^{x-1}}} dx$</p> <p>15. $\int \frac{x+2}{x^4+x^3} dx$</p> <p>16. $\int \frac{x^4-3x^2+x-1}{x^5-x^4+x^3-x^2} dx$</p> | <p>17. $\int \frac{x-1}{x^2+x+2} dx$</p> <p>18. $\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x} dx$</p> <p>19. $\int \frac{1-2\sin x}{\cos^2 x} dx$</p> <p>20. $\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x} dx$</p> <p>21. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x} dx$</p> <p>22. $\int \operatorname{cotg}^3 x dx$</p> <p>23. $\int \frac{1}{(x-2)^2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{2-x}} dx$</p> <p>24. $\int \frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt[6]{(x-1)^5+x-1}} dx$</p> <p>25. $\int \frac{1+\sqrt{\frac{x}{x+1}}}{x+1} dx$</p> <p>26. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$</p> <p>27. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$</p> <p>28. $\int_{-1}^1 \arccos x dx$</p> <p>29. $\int_{\ln 4}^{\ln 8} e^x \cdot \frac{\sqrt{e^x-3}}{e^x+2} dx$</p> <p>30. $\int_1^5 \frac{1}{x^2+x} dx$</p> |
|--|--|

Řešení:

1. **řešení:** $\ln |\ln 3x| + c$
2. **nápověda:** využití vztahů: $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
řešení: $\operatorname{tg} x - x + c$
3. **nápověda:** využití vztahu $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
řešení: $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3} \sin \frac{3x+1}{2} + c$
4. **nápověda:** rozklad čitatele podle vzorce $a^2 - b^2$
řešení: $x + e^x + c$
5. **nápověda:** 2x per partes
řešení: $-(x^2+4x+7)e^{-x+1} + c$

6. **nápověda:** $2x$ per partes + integrál dostaneme jako řešení rovnice

$$\text{řešení: } \frac{5}{34}e^{3x-2} \sin 5x + \frac{3}{34}e^{3x-2} \cos 5x + c$$

7. **nápověda:** per partes, dále dostáváme integrál z racionální lomené funkce (neryzí \Rightarrow dělení polynomů):

$$\int \frac{x^2}{1 + (3-x)^2} dx = \int \left(1 + \frac{6x-10}{x^2-6x+10} \right) dx.$$

Dostáváme integrál typu $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} \Rightarrow$ úprava na integrál vedoucí na přirozený logaritmus a arctg:

$$\frac{6x-10}{x^2-6x+10} = 3 \cdot \frac{2x-6}{x^2-6x+10} + 8 \cdot \frac{1}{(x-3)^2+1}$$

$$\text{řešení: } \frac{1}{2}x^2 \arctg(3-x) + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \ln|x^2-6x+10| + 4 \arctg(x-3) + c$$

8. **nápověda:** substituce $x^3 = t$, dále per partes $u(t) = \ln t, v'(t) = 1$; nebo 2. způsob: per partes $u(x) = \ln x^3, v'(x) = x^2$

$$\text{řešení: } \frac{1}{3}x^3 (\ln x^3 - 1) + c$$

9. **nápověda:** per partes $u(x) = \ln(2-3x), v'(x) = 1$

$$\text{řešení: } \left(x - \frac{2}{3} \right) \ln|2-3x| + c$$

10. **nápověda:** per partes $u(x) = \ln x, v'(x) = \sqrt{x}$

$$\text{řešení: } \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \left(\ln x - \frac{2}{3} \right) + c$$

11. **nápověda:** per partes $u(x) = \ln x, v'(x) = x^{-2}$

$$\text{řešení: } -\frac{1}{x} (\ln x + 1) + c$$

12. **nápověda:** per partes $u(x) = \arctg 3x, v'(x) = 1$

$$\text{řešení: } x \arctg 3x - \frac{1}{6} \ln|1+9x^2| + c$$

13. **nápověda:** substituce $x^2 + 1 = t^2$ nebo $x^2 + 1 = t$

$$\text{řešení: } 2\sqrt{x^2+1} + c$$

14. **nápověda:** substituce $e^{x-1} = t^2$ nebo $e^{x-1} = t$

$$\text{řešení: } -2\sqrt{e^{x-1}} + c$$

15. **nápověda:** rozklad na parciální zlomky:

$$\frac{x+2}{x^3(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x+1} + c$$

$$\text{řešení: } \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + c$$

16. **nápověda:** rozklad na parciální zlomky:

$$\frac{x^4 - 3x^2 + x - 1}{x^2(x^2+1)(x-1)} = \frac{2x+1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-1}$$

$$\text{řešení: } \ln \frac{x^2+1}{|x-1|} + \arctg x - \frac{1}{x} + c$$

17. **nápověda:** integrál typu $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} \Rightarrow$ úprava na integrál vedoucí na přirozený logaritmus a arctg:

$$\int \frac{x-1}{x^2+x+2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+2} dx - \frac{3}{2} \int \frac{1}{\sqrt[7]{4} \left[1 + \left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}} \right)^2 \right]} dx$$

řešení: $\frac{1}{2} \ln|x^2+x+2| - \frac{3}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{7}} + c$

18. **nápověda:** substituce $\cos x = t$, dále integrace (neryzí) racionální lomené funkce \Rightarrow dělení polynomů

$$\frac{t^2-1}{t+2} = t - 2 + \frac{3}{t+2}$$

řešení: $\frac{1}{2} \cos^2 x - 2 \cos x + 3 \ln|\cos x + 2| + c$

19. **nápověda:** rozdělit na rozdíl dvou zlomků, substituce $\cos x = t$

řešení: $\frac{\sin x - 2}{\cos x} + c$

20. **nápověda:** substituce $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, dále integrace (neryzí) racionální lomené funkce \Rightarrow dělení polynomů

$$\frac{t^2-2t+1}{t^2+1} = 1 - \frac{2t}{t^2+1}$$

řešení: $\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \ln \left| \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1 \right| + c$

21. **nápověda:** úprava čitatele podle vzorce $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, dále po použití vzorce $(a-b)^2$ dostáváme

$$\int \left(\frac{1}{\sin^4 x} - \frac{2}{\sin^2 x} + 1 \right) dx,$$

substituce $\operatorname{tg} x = t$

řešení: $-\frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x} + x + c = -\frac{1}{3} \operatorname{cotg}^3 x + \operatorname{cotg} x + x + c$

22. **nápověda:** substituce $\sin x = t$

řešení: $-\frac{1}{2\sin^2 x} - \ln|\sin x| + c$

23. **nápověda:** substituce $\frac{x+1}{2-x} = t^3$

řešení: $\frac{1}{4}t^4 + c$, kde $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2-x}}$

24. **nápověda:** substituce $x-1 = t^6$

řešení: $2t^3 - 3t^2 + 6t + c$, kde $t = \sqrt[6]{x-1}$

25. **nápověda:** substituce $\frac{x}{x+1} = t^2$, dále integrace (neryzí) racionální lomené funkce \Rightarrow dělení polynomů

$$\frac{t^3-2t}{t-1} = t^2 + t - 1 + \frac{1}{t-1}$$

řešení: $\frac{2}{3}t^3 + t^2 - 2t + 2 \ln|t-1| + c$, kde $t = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$

26. **nápověda:** substituce $x = t^4$, dále pak $1+t = u^3$

řešení: $\frac{12}{7}(1+t)^{7/3} - 3(1+t)^{4/3} + c$, kde $t = \sqrt[4]{x}$

27. **nápověda:** integrál typu $\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \Rightarrow$ úprava na $K \cdot \frac{f'}{\sqrt{f}} + L \cdot \frac{1}{\sqrt{f}}$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}} dx = \frac{1}{2} \underbrace{\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx}_{I_1} - \frac{1}{2} \underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx}_{I_2}$$

$$I_1 = 2\sqrt{x^2+x+1} + c$$

$$I_2 = \left| \text{úprava na čtverec: } x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \left[\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1 \right] \right| = \int \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}} dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}} dx = \left| \text{využijeme vztah } \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \ln|x+\sqrt{x^2+1}| + c \right|$$

$$= \ln \left| \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \right| + c$$

řešení: $2\sqrt{x^2+x+1} + \ln \left| \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \right| + c$

28. **nápověda:** per partes $u(x) = \arccos x, v'(x) = 1$

řešení: $[x \arccos x]_{-1}^1 - \left[\sqrt{1-x^2} \right]_{-1}^1 = \pi$

29. **nápověda:** substituce $e^x - 3 = t^2, x = \ln 4 \rightarrow t = 1, x = \ln 8 \rightarrow t = \sqrt{5}$

řešení: $2 \left([t]_1^{\sqrt{5}} - \sqrt{5} \left[\arctg \frac{t}{\sqrt{5}} \right]_1^{\sqrt{5}} \right) = 2(\sqrt{5}-1) - 2\sqrt{5} \left(\frac{\pi}{4} - \arctg \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$

30. **nápověda:** rozklad na parciální zlomky $\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$

řešení: $[\ln|x| - \ln|x+1|]_1^5 = \ln \frac{5}{3}$

Soubor může obashovat chyby. Pokud nějaké najdete, budu ráda, když mě na ně upozorníte! :)