Absolutní extrémy funkce svou proměnných

Příklad 1. Najděte globální extrémy funkce f na množině $\mathcal{M}$:

a) $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$, množinu $\mathcal{M}$ tvoří obdélník s vrcholy o souřadnicích $A = [-2,0]$, $B = [1,0]$, $C = [1,2]$,

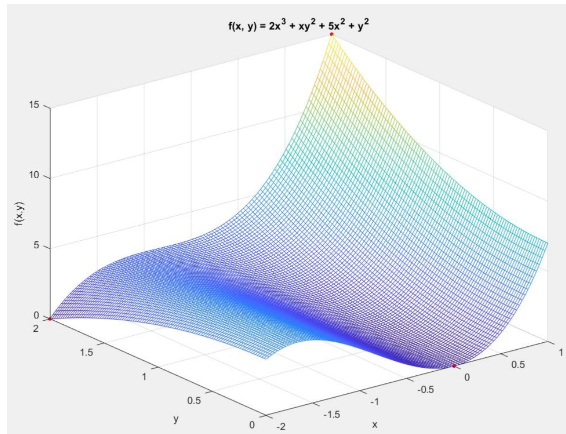
b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2y + 1$, $\mathcal{M} = \{[x,y] : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$,

c) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$, $\mathcal{M} = \{[x,y] : |x| + |y| \leq 1\}$.

Řešení.

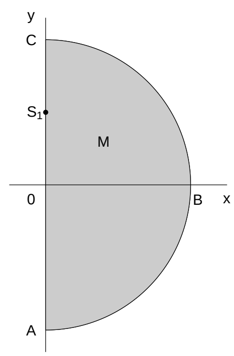
a)

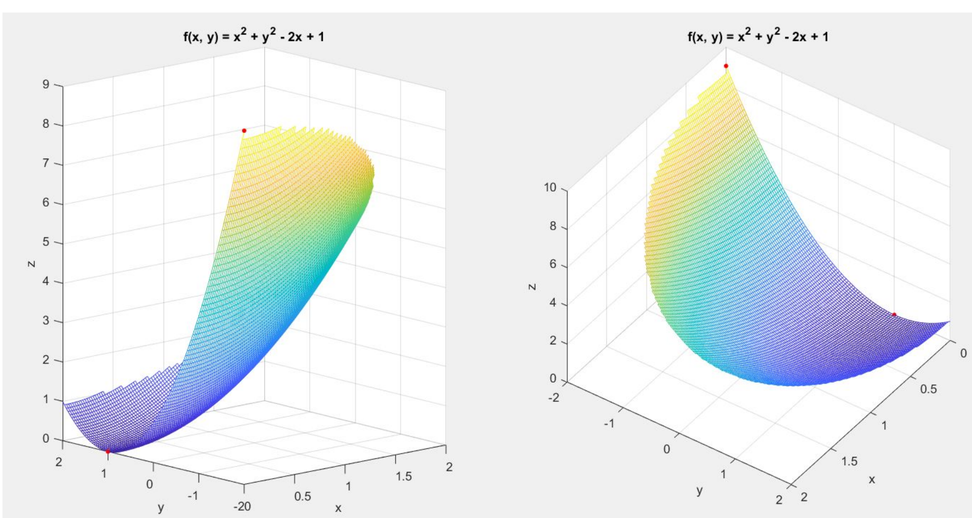
bod	funkční hodnota	
$S_1 = [0,0]$	0	$\rightarrow$ absolutní minimum
$S_2 = [-\frac{5}{3}, 0]$	4, 63	
$S_3 = [-1, 2]$	3	
$S_{10} = [-\frac{2}{3}, 2]$	2,693	
$A = [-2, 0]$	4	
$B = [1, 0]$	7	
$C = [1, 2]$	15	$\rightarrow$ absolutní maximum
$D = [-2, 2]$	0	$\rightarrow$ absolutní minimum



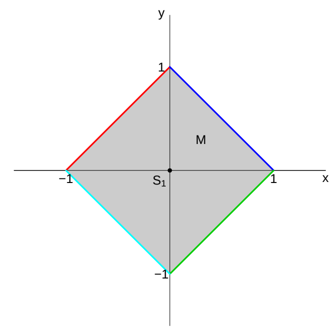
b)

bod	funkční hodnota	
$S_1 = [0,1]$	0	$\rightarrow$ absolutní minimum
$A = [0,-2]$	9	$\rightarrow$ absolutní maximum
$B = [2,0]$	5	
$C = [0,2]$	1	





c) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$, $\mathcal{M} = \{[x,y] : |x| + |y| \le 1\}$



- nejdříve najdeme všechny stacionární body funkce f, řešíme soustavu:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ -x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

a dostáváme stacionární bod o souřadnicích $S_1 = [0,0]$, který patří do množiny $\mathcal{M}$.
- stacionární body na hranici:

Opět popíšeme jednotlivé části hranice, na kterých hledáme stacionární body.

1. $y = x + 1,\ x \in [-1, 0]$: $g_1(x) = f(x, x+1) = x^2 - x(x+1) + (x+1)^2 \to g_1(x) = x^2 + x + 1$
   $g_1'(x) = 2x + 1$, hledání stacionárního bodu: $2x + 1 = 0 \to x = -\frac{1}{2} \to S_2 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
2. $y = -x + 1,\ x \in [0, 1]$: $g_2(x) = f(x, -x+1) = x^2 - x(1-x) + (1-x)^2 \to g_2(x) = 3x^2 - 3x + 1$
   $g_2'(x) = 6x - 3$, hledání stacionárního bodu: $6x - 3 = 0 \to x = \frac{1}{2} \to S_3 = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
3. $y = -x - 1,\ x \in [-1, 0]$: $g_3(x) = f(x, -x-1) = x^2 + x(x+1) + (x+1)^2 \to g_3(x) = 3x^2 + 3x + 1$
   $g_3'(x) = 6x + 3$, hledání stacionárního bodu: $6x + 3 = 0 \to x = -\frac{1}{2} \to S_= [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$
4. $y = x - 1,\ x \in [0, 1]$: $g_4(x) = f(x, x-1) = x^2 - x(x-1) + (x-1)^2 \to g_4(x) = x^2 - x + 1$
   $g_4'(x) = 2x - 1$, hledání stacionárního bodu: $2x - 1 = 0 \to x = \frac{1}{2} \to S_5 = [\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$

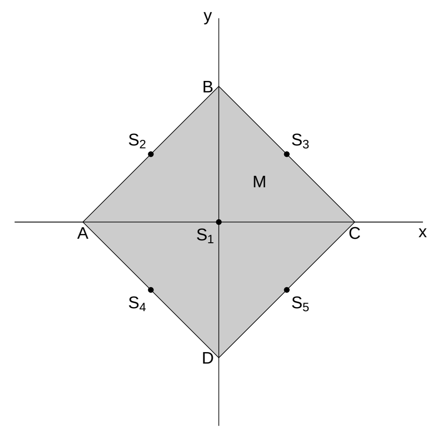
- společné body jednotlivých částí hranice:

$$A = [-1, 0],\ B = [0, 1],\ C = [1, 0],\ D[0, -1].$$

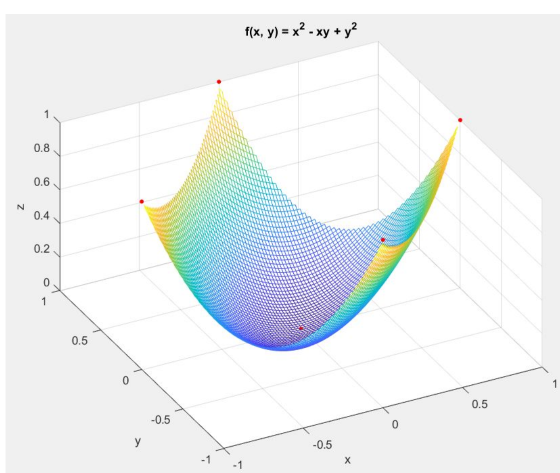
- porovnání hodnot funkce f v nalezených bodech

Body mají stejné souřadnice: S_2 a C, S_3 a A, S_1 a S_4

bod	funkční hodnota	
$S_1 = [0,0]$	0	$\to$ absolutní minimum
$S_2 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$	0,75	
$S_3 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$	0,25	
$S_4 = \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$	0,25	
$S_5 = \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$	0,75	
$A = [-1, 0]$	1	$\to$ absolutní maximum
$B = [0, 1]$	1	$\to$ absolutní maximum
$C = [1, 0]$	1	$\to$ absolutní maximum
$C = [-1, 0]$	1	$\to$ absolutní maximum



- graf



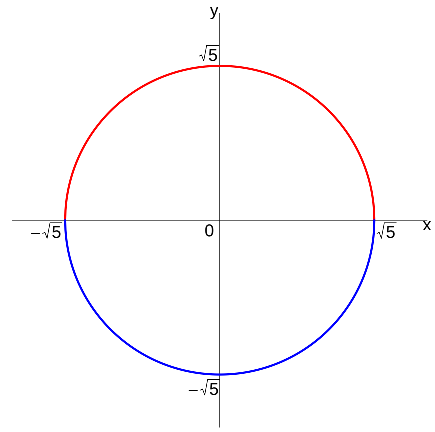
Příklad 2. (Vázané extrémy.) Najděte extrémy funkce $f(x,y) = x + 2y$ za podmínky $x^2 + y^2 = 5$.

Řešení. Hledáme absolutní minimum/maximum funkce $f(x,y) = x + 2y$ při vazebné podmínce $x^2 + y^2 = 5$.

- nehledáme stacionární body uvnitř kruhu, protože vazebná podmínka vyjadřuje pouze její hranici
- stacionární body na hranici: Opět popíšeme jednotlivé části hranice, na kterých hledáme stacionární body.

1. $y = \sqrt{5-x^2},\ x \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$: $g_1(x) = f(x, \sqrt{5-x^2}) = x + 2\sqrt{5-x^2}$
   $g_1'(x) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{5-x^2}}$, hledání stacionárního bodu:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2x}{\sqrt{5-x^2}} &= 0 \\ \frac{\sqrt{5-x^2} - 2x}{\sqrt{5-x^2}} &= 0 \\ \sqrt{5-x^2} - 2x &= 0 \wedge x \neq \pm\sqrt{5} \\ 5 - x^2 &= 4x^2 \\ 5x^2 - 5 &= 0 \end{aligned}$$



   $\to x = \pm 1 \to y = 2$ (dosazení $x = \pm 1$ do $y = \sqrt{5-x^2}$)
   $\to S_1 = [-1, 2]$, $S_2 = [1, 2]$.

2. $y = -\sqrt{5-x^2},\ x \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$: $g_2(x) = f(x, -\sqrt{5-x^2}) = x - 2\sqrt{5-x^2}$
   $g_2'(x) = 1 + \frac{2x}{\sqrt{5-x^2}}$, hledání stacionárního bodu:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2x}{\sqrt{5-x^2}} &= 0 \\ \frac{\sqrt{5-x^2} + 2x}{\sqrt{5-x^2}} &= 0 \\ \sqrt{5-x^2} + 2x &= 0 \wedge x \neq \pm\sqrt{5} \\ 5 - x^2 &= 4x^2 \\ 5 - 5x^2 &= 0 \end{aligned}$$

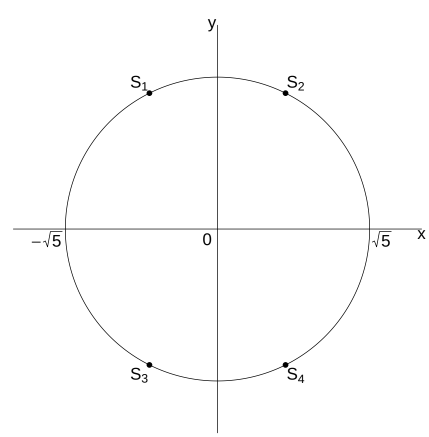
   $\to x = \pm 1 \to y = -2$ (dosazení $x = \pm 1$ do $y = -\sqrt{5-x^2}$)
   $\to S_3 = [-1, -2]$, $S_4 = [1, -2]$.

- společné body jednotlivých částí hranice:

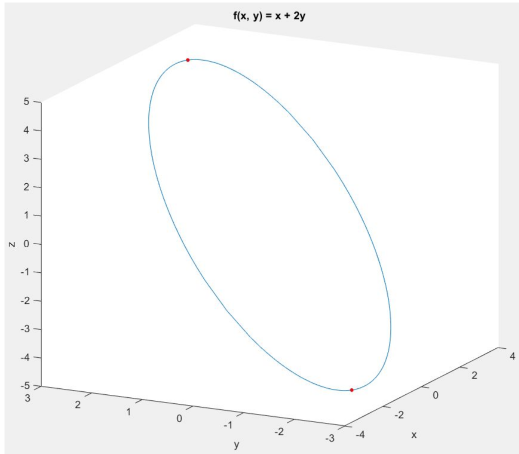
$$A = [-\sqrt{5}, 0],\ B = [\sqrt{5}, 0].$$

- porovnání hodnot funkce f v nalezených bodech

bod	funkční hodnota	
$S_1 = [-1, 2]$	3	
$S_2 = [1, 2]$	5	$\to$ absolutní maximum
$S_3 = [-1, -2]$	-5	$\to$ absolutní minimum
$S_4 = [1, -2]$	-3	
$A = [-\sqrt{5}, 0]$	$-\sqrt{5}$	
$B = [\sqrt{5}, 0]$	$\sqrt{5}$	



- graf



Literatura:

- Tryhuk, Dlouhý. Matematika I, Diferenciální počet funkcí více reálných proměnných, CERM, Brno, 2004
- Hřebíčková, Slaběňáková, Šafářová. Sbírka příkladů z matematiky II, CERM, 2008