Lokální extrémy funkce dvou proměnných

Příklad 1. Najděte lokální extrémy dané funkce

a) $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$,

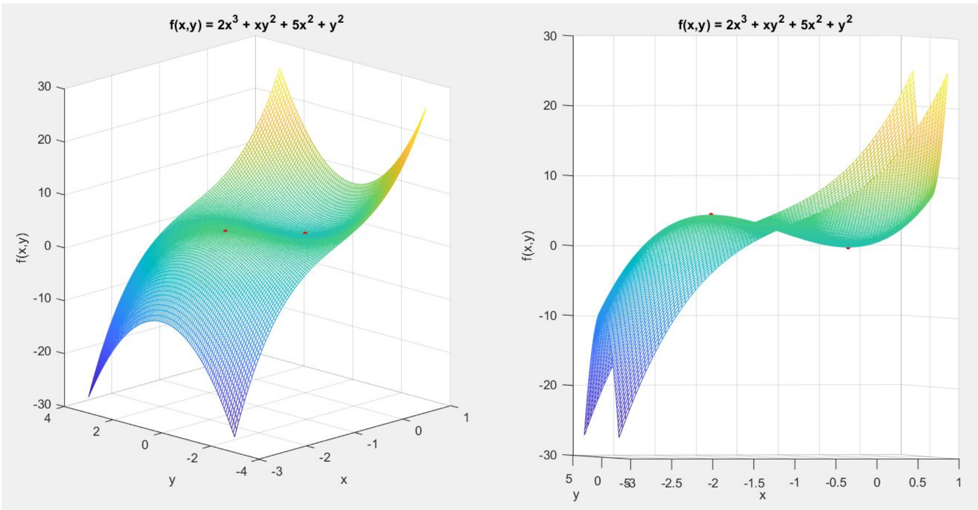
b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2y + 1$,

c) $f(x,y) = \ln\dfrac{x}{6} + 2\ln y + \ln(12 - x - y)$

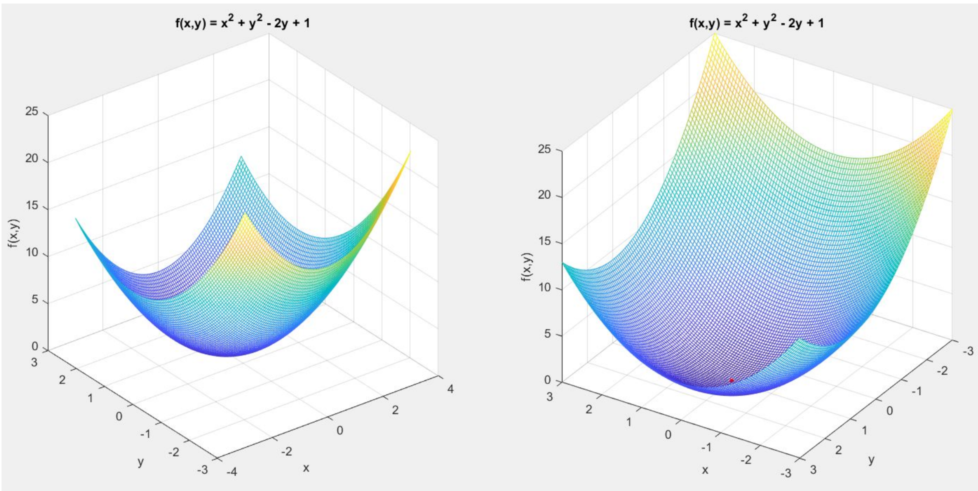
Řešení.

a)

$$S_1 = [0,0] \ldots \text{lokální minimum}$$
$$S_2 = \left[-\frac{5}{3}, 0\right] \ldots \text{lokální maximum}$$
$$S_3 = [-1,2] \ldots \text{není lokální extrém}$$
$$S_4 = [-1,-2] \ldots \text{není lokální extrém}$$



b) $S = [0,1] \ldots$ lokální minimum



c) • definiční obor $\mathcal{D}(f) = \big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0 \wedge y < 12 - x\big\}$
• parciální derivace:

$$f'_x = \frac{1}{x} - \frac{1}{12 - x - y}$$
$$f'_y = \frac{2}{y} - \frac{1}{12 - x - y}$$

• stacionární body získáme položením parciálních derivací nule a řešením takto získaného systému rovnic:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{12 - x - y} = 0 \tag{1}$$
$$\frac{2}{y} - \frac{1}{12 - x - y} = 0. \tag{2}$$

Odečtením rovnice (2) od rovnice (1) dostáváme

$$\frac{1}{x} - \frac{2}{y} = 0.$$

Dále úpravou na společného jmenovatele dostáváme

$$\frac{y - 2x}{xy} = 0 \Leftrightarrow y = 2x \wedge xy \neq 0.$$

Dosazením $y = 2x$ do rovnice (1) dále dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} - \frac{1}{12 - x - 2x} &= 0 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{12 - 3x} &= 0 \\ \frac{12 - 4x}{x(12 - 3x)} &= 0 \\ x = 3 \rightarrow y &= 6 \text{ (souřadnici } y \text{ získáme dosazením } x = 3 \text{ do } y = 2x). \end{aligned}$$

Souřadnice stacionárního bodu: $S = [3, 6]$.
• parciální derivace druhého řádu:

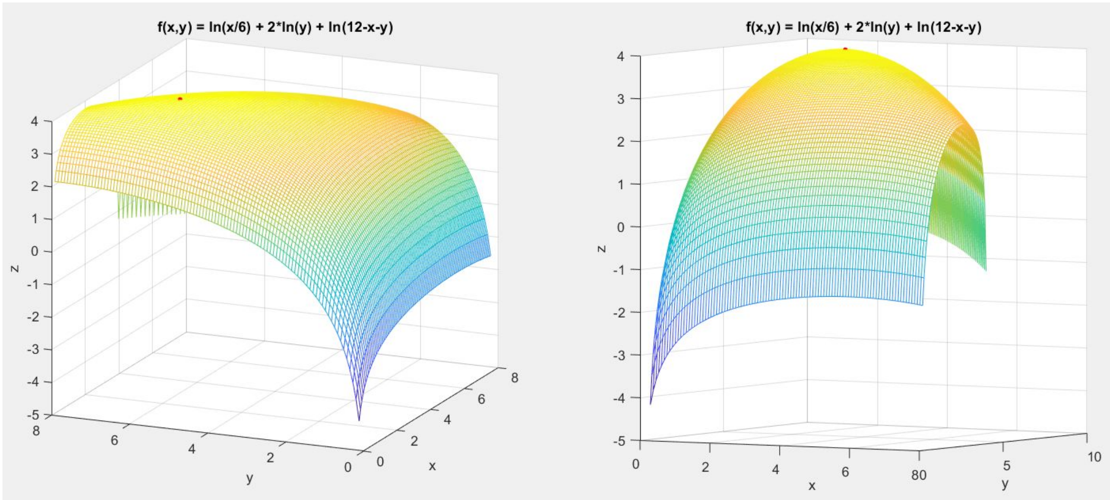
$$f''_{xx} = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(12 - x - y)^2}$$
$$f''_{xy} = -\frac{1}{(12 - x - y)^2}$$
$$f''_{yy} = -\frac{2}{y^2} - \frac{1}{(12 - x - y)^2}$$

• výpočet hodnot parciálních derivací druhého řádu v bodě $S = [3, 6]$:

$$f''_{xx}(S) = -\frac{2}{9},\ f''_{xy}(S) = -\frac{1}{9},\ f''_{yy}(S) = -\frac{1}{6}$$

• výpočet hodnoty determinantu a rozhodnutí o existenci lokálního extrému (na základě Sylvestrova kritéria)

$$D(S) = \begin{vmatrix} -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{6} \end{vmatrix} = \frac{2}{81} > 0,\ f''_{xx}(S) = -\frac{2}{9} < 0 \ldots \text{v bodě } S = [3, 6] \text{ má funkce lokální maximum}$$



Literatura:

- Tryhuk, Dlouhý. Matematika I, Diferenciální počet funkcí více reálných proměnných, CERM, Brno, 2004
- Hřebíčková, Slaběňáková, Šafářová. Sbírka příkladů z matematiky II, CERM, 2008