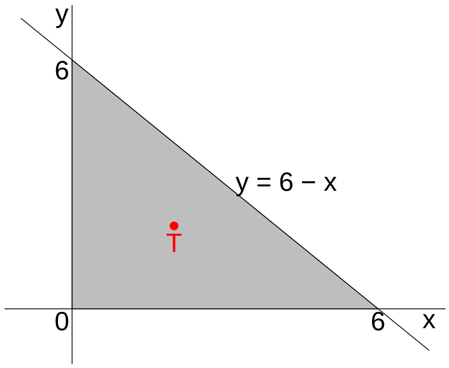
Příklad 1. (Těžiště homogenní hmotné oblasti.) Najděte souřadnice těžiště T homogenní hmotné oblasti omezené grafy funkcí $x = 0$, $y = 0$ a $x + y = 6$.

Řešení.



$$m = \sigma \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x,$$

$$S_x = \frac{1}{2}\sigma \int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right)\mathrm{d}x,$$

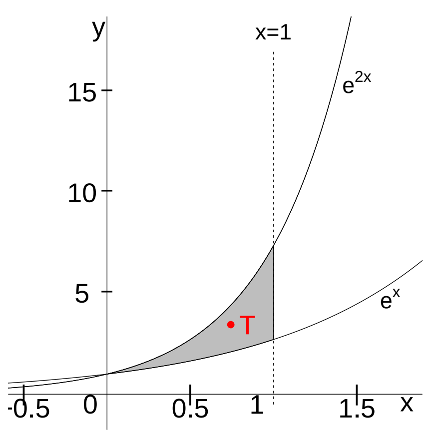
$$S_y = \sigma \int_a^b x\,(f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x.$$

Výpočet:

- homogenní hmotná oblast → hustota je konstantní → na hustotu σ pohlížejte jako na konstantu, proto je (na rozdíl od nehomogenní hmotné oblasti) před integrálem. „Horní“ funkci označme $f(x) = 6 - x$, „dolní“ funkci $g(x) = 0$.
- hmotnost: $m = \sigma \int\limits_0^6 (6 - x)\,\mathrm{d}x = \cdots = 18\sigma$
- statický moment S_x: $S_x = \frac{1}{2}\sigma \int\limits_0^6 (6 - x)^2\,\mathrm{d}x = \cdots = 36\sigma$
- statický moment S_y: $S_y = \sigma \int\limits_0^6 x\,(6 - x)\,\mathrm{d}x = \cdots = 36\sigma$
- souřadnice těžiště: $\left.\begin{array}{ll} x_T & = \frac{S_y}{m} = \frac{36\sigma}{18\sigma} = 2, \\ y_T & = \frac{S_x}{m} = \frac{36\sigma}{18\sigma} = 2 \end{array}\right\} \to T = [2, 2]$

Příklad 2. (Těžiště homogenní hmotné oblasti.) Najděte souřadnice těžiště T homogenní hmotné oblasti omezené grafy funkcí $y = \mathrm{e}^x$, $y = \mathrm{e}^{2x}$ a $x = 1$.

Řešení.



$$m = \sigma \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x,$$

$$S_x = \frac{1}{2}\sigma \int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right)\mathrm{d}x,$$

$$S_y = \sigma \int_a^b x\,(f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x.$$

Výpočet:

- homogenní hmotná oblast → hustota je konstantní → na hustotu σ pohlížejte jako na konstantu; $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$, $g(x) = \mathrm{e}^x$

- hmotnost: $m = \sigma \int\limits_0^1 \left(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x\right)\,\mathrm{d}x = \sigma \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x\right]_0^1 = \frac{1}{2}\sigma\left(\mathrm{e}-1\right)^2$

- statistický moment S_x: $S_x = \frac{1}{2}\sigma \int\limits_0^1 \left(\mathrm{e}^{4x} - \mathrm{e}^{2x}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sigma \left[\frac{1}{4}\mathrm{e}^{4x} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_0^1 = \frac{1}{8}\sigma\left(\mathrm{e}^2-1\right)^2$

- statický moment S_y:

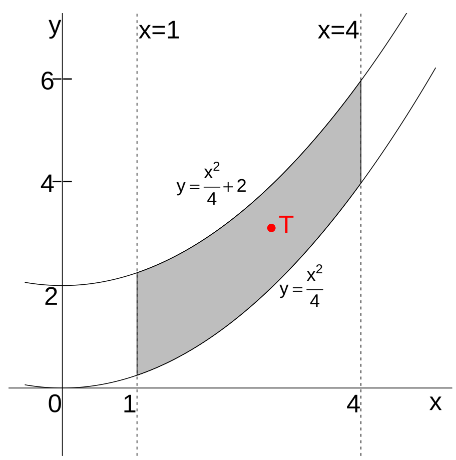
$$S_y = \sigma \int\limits_0^1 x\left(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x\right)\,\mathrm{d}x = \sigma \int\limits_0^1 \left(x\mathrm{e}^{2x} - x\mathrm{e}^x\right)\,\mathrm{d}x = \sigma\left(\frac{1}{4}\mathrm{e}^2 + \frac{1}{4} - 1\right) = \frac{1}{4}\sigma\left(\mathrm{e}^2-3\right)$$

$$\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} u(x)=x & v'(x)=\mathrm{e}^{2x} \\ u'(x)=1 & v(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\end{array}\right| = \frac{1}{2}\left[x\mathrm{e}^{2x}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \frac{1}{4}\mathrm{e}^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\mathrm{e}^2 + \frac{1}{4}$$

$$\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} u(x)=x & v'(x)=\mathrm{e}^{x} \\ u'(x)=1 & v(x)=\mathrm{e}^{x}\end{array}\right| = \left[x\mathrm{e}^{x}\right]_0^1 - \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - \mathrm{e} + 1 = 1$$

- souřadnice těžiště: $\left.\begin{array}{lll} x_T & = \frac{S_y}{m} = \frac{\frac{1}{4}\sigma\left(\mathrm{e}^2+1\right)}{\frac{1}{2}\sigma(\mathrm{e}-1)^2} = \frac{\mathrm{e}^2-3}{2(\mathrm{e}-1)^2} \\ y_T & = \frac{S_x}{m} = \frac{\frac{1}{8}\sigma\left(\mathrm{e}^2-1\right)^2}{\frac{1}{2}\sigma(\mathrm{e}-1)^2} = \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}+1\right)^2 \end{array}\right\} \to T = \left[\frac{\mathrm{e}^2-3}{2\left(\mathrm{e}-1\right)^2}, \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}+1\right)^2\right]$

Příklad 3. (Těžiště nehomogenní hmotné oblasti.) Najděte souřadnice těžiště T nehomogenní hmotné oblasti omezené grafy funkcí $y = \frac{x^2}{4} + 2$, $y = \frac{x^2}{4}$, $x = 1$ a $x = 4$, jestliže je hustota v každém bodě rovna souřadnici x.
Řešení.



$$m = \int\limits_a^b \sigma(x)\left(f(x) - g(x)\right)\,\mathrm{d}x,$$

$$S_x = \frac{1}{2}\int\limits_a^b \sigma(x)\left(f^2(x) - g^2(x)\right)\,\mathrm{d}x,$$

$$S_y = \int\limits_a^b \sigma(x)x\left(f(x) - g(x)\right)\,\mathrm{d}x.$$

Výpočet:

- nehomogenní hmotná oblast $\to$ hustota $\sigma(x)$ je funkcí proměnné x, musí tedy být **uvnitř** integrálu; $f(x) = \frac{x^2}{4} + 2$, $g(x) = \frac{x^2}{4}$

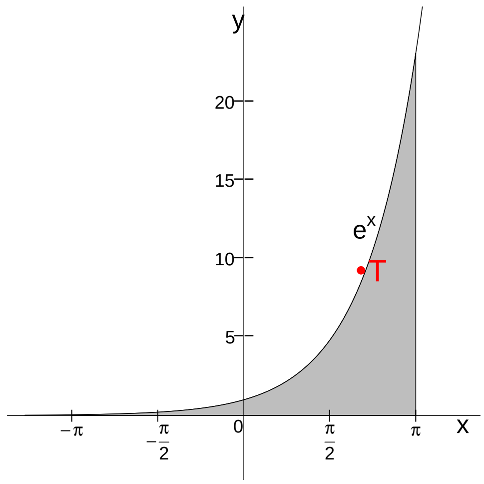
- hmotnost: $m = \int\limits_1^4 x\left(\frac{x^2}{4} + 2 - \frac{x^2}{4}\right)\,\mathrm{d}x = \cdots = 18$

- statický moment S_x: $S_x = \frac{1}{2}\int\limits_1^4 x\left(\left(\frac{x^2}{4}+2\right)^2 - \left(\frac{x^2}{4}\right)^2\right)\,\mathrm{d}x = \cdots = \frac{375}{8}$

- statický moment S_y: $S_y = \int\limits_1^4 x^2\left(\frac{x^2}{4} + 2 - \frac{x^2}{4}\right)\,\mathrm{d}x = \cdots = 42$

- souřadnice těžiště: $\left.\begin{aligned} x_T &= \frac{S_y}{m} = \frac{14}{5}, \\ y_T &= \frac{S_x}{m} = \frac{25}{8} \end{aligned}\right\} \to T = \left[\frac{14}{5}, \frac{25}{8}\right]$

Příklad 4. (Těžiště nehomogenní hmotné oblasti.) Najděte souřadnici y těžiště T nehomogenní hmotné oblasti omezené křivkami $y = \mathrm{e}^x$, $y = 0$, $x \in [-\pi, \pi]$, kde hustota je rovna $\sigma(x) = \sin x$. *Odvážlivci mohou najít i souřadnici x :)*
Řešení.



$$m = \int_a^b \sigma(x)\,(f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x,$$

$$S_x = \frac{1}{2}\int_a^b \sigma(x)\left(f^2(x) - g^2(x)\right)\mathrm{d}x,$$

$$S_y = \int_a^b \sigma(x) x\,(f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x.$$

- nehomogenní hmotná oblast $\to$ hustota $\sigma(x)$ je funkcí proměnné x, musí tedy být **uvnitř** integrálu; $f(x) = \mathrm{e}^x$, $g(x) = 0$
- hmotnost:

$$m = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u(x) = \mathrm{e}^x & v'(x) = \sin x \\ u'(x) = \mathrm{e}^x & v(x) = -\cos x \end{array} \right| = -\left[\mathrm{e}^x \cdot \cos x\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^x \cdot \cos x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u(x) = \mathrm{e}^x & v'(x) = \cos x \\ u'(x) = \mathrm{e}^x & v(x) = \sin x \end{array} \right|$$

$$= -\left(-\mathrm{e}^{\pi} + \mathrm{e}^{-\pi}\right) + \left[\mathrm{e}^x \cdot \sin x\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^x \cdot \sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^x \cdot \sin x\,\mathrm{d}x = |\text{dále řešíme jako rovnici}|$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e} \cdot \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}\right) \Rightarrow m = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}\right)$$

- statický moment S_x:

$$S_x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cdot \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = |\text{2x per partes}| = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{2\pi} - \mathrm{e}^{-2\pi}\right) - 2\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{2x} \cdot \sin x\,\mathrm{d}x = |\text{dále řešíme jako rovnici}|$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{2x} \cdot \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\left(\mathrm{e}^{2\pi} - \mathrm{e}^{-2\pi}\right) \Rightarrow S_x = \frac{1}{5}\left(\mathrm{e}^{2\pi} - \mathrm{e}^{-2\pi}\right)$$

- statický moment S_y:

$$S_y=\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{ll} u(x)=x\sin x & v'(x)=\mathrm{e}^x\\ u'(x)=\sin x+x\cos x & v(x)=\mathrm{e}^x\end{array}\right|=\underbrace{\left[x\sin x\mathrm{e}^x\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0}-\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\sin x+x\cos x)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

$$=-\underbrace{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x}_{\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi})}-\int\limits_{-\pi}^{\pi}x\mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{ll} u(x)=x\cos x & v'(x)=\mathrm{e}^x\\ u'(x)=\cos x-x\sin x & v(x)=\mathrm{e}^x\end{array}\right|$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}\right)-\left(\underbrace{\left[x\mathrm{e}^x\cos x\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=-\pi\mathrm{e}^{\pi}-\pi\mathrm{e}^{-\pi}}-\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\cos x-x\sin x)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}\right)+\pi\left(\mathrm{e}^{\pi}+\mathrm{e}^{-\pi}\right)+\underbrace{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x}_{-\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi})}-\int\limits_{-\pi}^{\pi}x\mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$\left|\text{pomocný výpočet: }\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x\left(\sin x+\cos x\right)+c\Rightarrow\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}\right)\right|$$

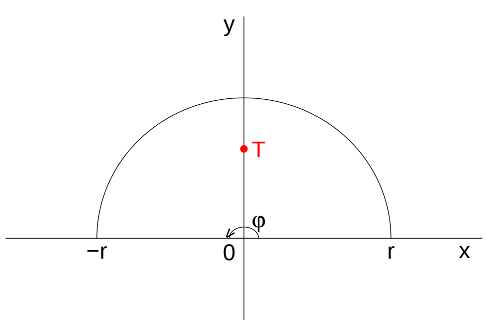
$$=|\text{dále řešíme jako rovnici: }|=2\int\limits_{-\pi}^{\pi}x\mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}\right)+\pi\left(\mathrm{e}^{\pi}+\mathrm{e}^{-\pi}\right)-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}\right)$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}x\mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\left(\mathrm{e}^{\pi}+\mathrm{e}^{-\pi}\right)-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\pi}+\mathrm{e}^{-\pi}\right)\Rightarrow S_y=\frac{\pi}{2}\left(\mathrm{e}^{\pi}+\mathrm{e}^{-\pi}\right)-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\pi}+\mathrm{e}^{-\pi}\right)$$

- souřadnice těžiště:

$$\left.\begin{array}{ll} x_T &=\frac{S_y}{m}=\frac{\frac{\pi}{2}\left(\mathrm{e}^{\pi}+\mathrm{e}^{-\pi}\right)-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\pi}+\mathrm{e}^{-\pi}\right)}{\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}\right)}=\pi-\frac{\mathrm{e}^{\pi}+\mathrm{e}^{-\pi}}{\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}}\\ y_T &=\frac{S_x}{m}=\frac{\frac{1}{5}\left(\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi}\right)}{\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}\right)}=\frac{2}{5}\frac{\left(\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}\right)\left(\mathrm{e}^{\pi}+\mathrm{e}^{-\pi}\right)}{\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}}=\frac{2}{5}\left(\mathrm{e}^{\pi}+\mathrm{e}^{-\pi}\right)=\frac{2}{5}\cdot\frac{\mathrm{e}^{2\pi}+1}{\mathrm{e}^{\pi}}\end{array}\right\}\to T=\left[\pi-\frac{\mathrm{e}^{\pi}+\mathrm{e}^{-\pi}}{\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}},\frac{2}{5}\cdot\frac{\mathrm{e}^{2\pi}+1}{\mathrm{e}^{\pi}}\right]$$

Příklad 5. (Těžiště homogenního hmotného oblouku) Najděte souřadnice těžiště T hmotného oblouku daného půlkružnicí dané parametricky $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $\varphi\in[0,\pi]$.
Řešení.



$$m=\sigma\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}\,\mathrm{d}t,$$

$$S_x=\sigma\int\limits_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}\,\mathrm{d}t,$$

$$S_y=\sigma\int\limits_{\alpha}^{\beta}\varphi(t)\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Výpočet:

- nehomogenní hmotný oblouk $\to$ hustota σ je konstantní; pro parametrické vyjádření je vždy $x=\varphi(t)$ a $y=\psi(t)$, v tomto případě tedy $\varphi(t)=r\cos t$, $\psi(t)=r\sin t$, $t\in[0,\pi]$
- hmotnost: $m=\sigma\int\limits_{0}^{\pi}\sqrt{r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi=\sigma\int\limits_{0}^{\pi}\sqrt{r^2}\,\mathrm{d}\varphi=r\sigma\left[\varphi\right]_0^{\pi}=r\pi\sigma$

- statistický moment S_x: $S_x = \sigma \int\limits_0^{\pi} r \sin\varphi \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \sigma \int\limits_0^{\pi} r\sin\varphi \cdot r\,\mathrm{d}\varphi = -\sigma r^2\left[\cos\varphi\right]_0^{\pi} = 2\sigma r^2$

- statistický moment S_y: $S_y = \sigma \int\limits_0^{\pi} r \cos\varphi \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \sigma r^2\left[\sin\varphi\right]_0^{\pi} = 0$

- souřadnice těžiště: $\left.\begin{array}{ll} x_T & = \frac{S_y}{m} = 0 \\ y_T & = \frac{S_x}{m} = \frac{2\sigma r^2}{r\pi\sigma} = \frac{2r}{\pi} \end{array}\right\} \to T = \left[0, \frac{2r}{\pi}\right]$

Poznámka. Vyzkoušejte spočítat těžiště tohoto hmotného oblouku pro explicitní vyjádření. Nástin řešení:

- výpočet dosazením do vztahů:
  $m = \sigma \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x, \quad S_x = \sigma\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x, \quad S_y = \sigma\int\limits_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$

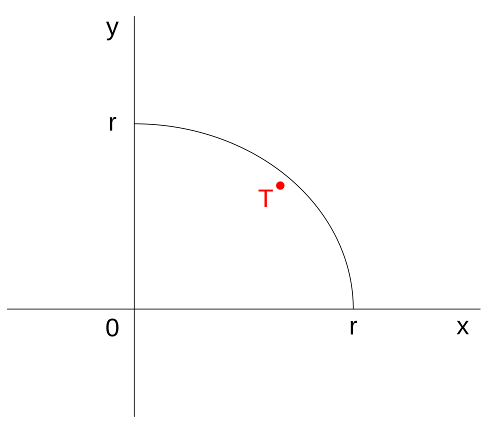
- oebcná rovnice kružnice: $x^2 + y^2 = r^2 \to$ explicitní vyjádření: $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \to f'(x) = -\frac{x}{r^2 - x^2}$

- hmotnost: $m = \sigma \int\limits_{-r}^{r} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = r\sigma \int\limits_{-r}^{r} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = \sigma \int\limits_{-r}^{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}}\,\mathrm{d}x = \sigma r\left[\arcsin\left(\frac{x}{r}\right)\right]_{-r}^{r} = \sigma\pi r$

- statický moment S_x: $S_x = \sigma\int\limits_{-r}^{2} \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} = \sigma r\left[x\right]_{-r}^{r} = 2\sigma r^2$

- statický moment S_y: $S_y = \sigma\int\limits_{-r}^{r} x\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \left|\text{substituce: } r^2 - x^2 = t^2\right| = -r\sigma\int\limits_0^0 \mathrm{d}t = 0$

Příklad 6. (Těžiště nehomogenního hmotného oblouku) Najděte souřadnice těžiště T hmotného oblouku daného čtvrtkružnicí $x^2 + y^2 = r^2$ v 1. kvadrantu, je-li hustota v každém bodě úměrná součinu souřadnic příslušného bodu.
Řešení.



$$m = \int\limits_a^b \sigma(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x,$$
$$S_x = \int\limits_a^b \sigma(x) f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x,$$
$$S_y = \int\limits_a^b \sigma(x) x\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Výpočet:

- explicitní vyjádření rovnice kružnice: $x^2 + y^2 = r^2 \to y = \sqrt{r^2 - x^2} \to f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \to (f'(x))^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}$

- tvar funkce hustoty hmotného oblouku: $\sigma(x) = k \cdot x \cdot y = k \cdot x \cdot \sqrt{r^2 - x^2},\ k$ vyjadřuje koeficient úměrnosti

- hmotnost:

$$m = \int\limits_0^r k\cdot x\cdot\sqrt{r^2 - x^2}\cdot\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^r k\cdot x\cdot\sqrt{r^2 - x^2}\cdot\sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = k\cdot r\cdot\frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^r = \frac{1}{2}r^3 k$$

- statický moment S_x:

$$S_x = \int_0^r k \cdot x \cdot \sqrt{r^2-x^2} \cdot \sqrt{r^2-x^2} \cdot \sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^r k \cdot x \cdot \left(r^2-x^2\right) \cdot \sqrt{\frac{r^2-x^2+x^2}{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= k \cdot r \int_0^r x \cdot \sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} r^2-x^2=z^2 & x=0 \Rightarrow z=r \\ \mathrm{d}x = -\frac{z}{x}\,\mathrm{d}z & x=r \Rightarrow z=0 \end{array} \right| = k \cdot r \int_0^r z^2\,\mathrm{d}z = k \cdot r \cdot \frac{1}{3}\left[z^3\right]_0^r = \frac{1}{3} r^4 k$$

- statický moment S_y:

$$S_y = \int_0^r k \cdot x \cdot \sqrt{r^2-x^2} \cdot x \cdot \sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^r k \cdot x^2 \cdot \sqrt{r^2-x^2+x^2}\,\mathrm{d}x = k \cdot r \cdot \frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^r = \frac{1}{3} r^4 k$$

- souřadnice těžiště: $\left.\begin{array}{ll} x_T & = \frac{S_y}{m} = \frac{\frac{1}{3}r^4k}{\frac{1}{2}r^3k} = \frac{2}{3}r \\ y_T & = \frac{s_x}{m} = \frac{\frac{1}{3}r^4k}{\frac{1}{2}r^3k} = \frac{2}{3}r \end{array}\right\} \to T = \left[\frac{2}{3}r, \frac{2}{3}r\right]$

Poznámka. Vyzkoušejte spočítat těžiště tohoto hmotného oblouku pro explicitní vyjádření. Nástin řešení:

- výpočet dosazením do vztahů: $m = \int_\alpha^\beta \sigma(t)\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\,\mathrm{d}t$, $\quad S_x = \int_\alpha^\beta \sigma(t)\psi(t)\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\,\mathrm{d}t$, $S_y = \int_\alpha^\beta \sigma(t)\varphi(t)\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\,\mathrm{d}t$
- parametrické vyjádření rovnice kružnice: $x = \varphi(t) = r\cos t$, $y = \psi(t) = r\sin t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
- hmotnost: $m = \int_0^{\pi/2} kr^2 \cos t \sin t \cdot r\,\mathrm{d}t = kr^3 \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t\,\mathrm{d}t = |\text{substituce: } \cos t = u| = \frac{1}{2}kr^3$
- statický moment S_x: $S_x = \int_0^{\pi/2} kr^2 \sin t \cos t r \sin t r\,\mathrm{d}t = kr^4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos t\,\mathrm{d}t = |\text{substituce: } \sin t = u| = \frac{1}{3}kr^4$
- statický moment S_y: $S_y = \int_0^{\pi/2} kr^2 \sin t \cos t r \cos t r\,\mathrm{d}t = kr^4 \int_0^{\pi/2} \sin t \cos^2 t\,\mathrm{d}t = |\text{substituce: } \cos t = u| = \frac{1}{3}kr^4$

Zdroj: Hřebíčková, Slaběňáková, Šafářová. Sbírka příkladů z matematiky II, CERM, 2008.