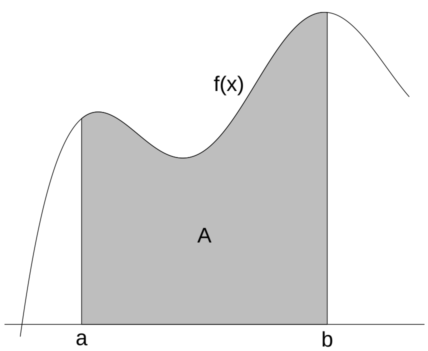
Obsah rovinného obrazce

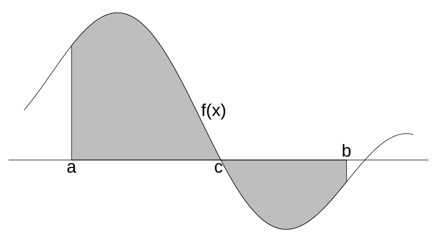
(A) $\mathrm{P(A)} = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

(B) $\mathrm{P(A)} = \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ... použijeme v případě, kdy se část funkce f nachází nad osou x, část pod osou x

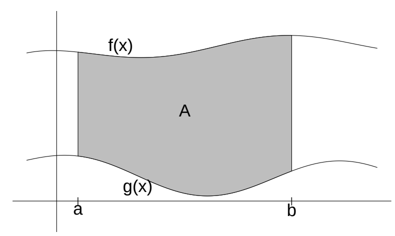
(C) $\mathrm{P(A)} = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$ ... obsah plochy mezi dvěma křivkami, v integrálu je „horní funkce minus dolní funkce“. Nezáleží na tom, zda jsou funkce nad/pod osou x, záleží pouze na tom, která je „výše“ a která je „níže“.



(A)



(B)

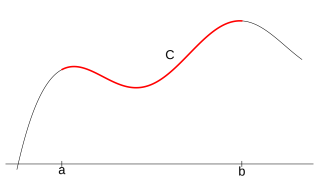


(C)

Postup pro určení obsahu:

1. Zakreslení grafů funkcí ohraničující danou oblast.
2. Určení průsečíků funkcí – často souvisí s mezemi určitého integrálu.
3. Sestavení integrálu a jeho výpočet. Pro kontrolu: obsah je nezáporné číslo!

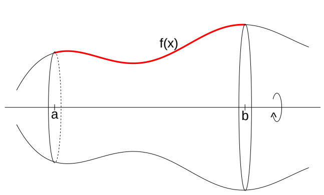
Délka oblouku rovinné křivky



$$\boxed{\mathrm{L(C)} = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x}$$

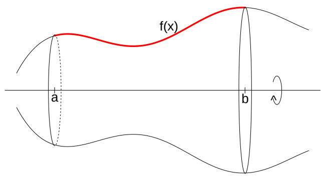
$$\boxed{\mathrm{L(C)} = \int\limits_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t}$$

Objem rotačního tělesa



- rotace kolem osy x : $\boxed{\mathrm{V_x} = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}$
- rotace kolem osy y : $\boxed{\mathrm{V_y} = \pi \int\limits_c^d f^2(y)\,\mathrm{d}y}$

Povrch rotačního tělesa



- rotace kolem osy x :

$$\boxed{\mathrm{P_x} = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x}$$

- rotace kolem osy y :

$$\boxed{\mathrm{P_y} = 2\pi \int\limits_c^d g(y)\sqrt{1+(g'(y))^2}\,\mathrm{d}y}$$

Příklady

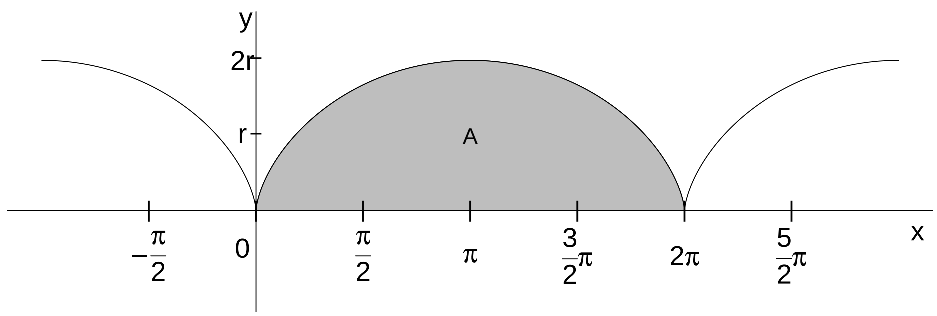
1. Určete obsah plochy A ohraničené grafy funkcí $y = 4 - x^2$ a $y = 0$.
2. Určete obsah plochy A ohraničené grafy funkcí $y = x^2$ a $y^2 = x$.
3. Určete obsah plochy A ohraničené grafy funkcí $y^2 = 2x$ a $y = x - 4$.
4. Určete délku oblouku rovinné křivky na intervalu $[0,1]$ pro explicitně zadanou křivku C : $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin\sqrt{x}$.
5. Určete délku oblouku $\frac{1}{8}$ kružnice.
6. Určete objem tělesa, které vznikne rotací plochy A kolem osy x. Plocha A je ohraničena křivkami $xy = 4,\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0$.
7. Určete objem tělesa, které vznikne rotací plochy A kolem osy x. Plocha A je ohraničena křivkami $y = -x^2 + 1,\ y = -2x^2 + 2$.
8. Určete objem tělesa, které vznikne rotací plochy A kolem osy y. Plocha A je ohraničena křivkami $y^2 = 4 - x,\ x = 0$.
9. Určete (a) povrch pláště a (b) celkový povrch komolého rotačního kužele s poloměrem podstav $r_1 = 4$ cm, $r_2 = 2$ cm a výškou $v = 3$ cm.

Řešené příklady pro parametricky zadané křivky

Příklad 1. (Obsah rovinného obrazce - parametrické vyjádření.)
Spočítejte obsah oblasti v rovině ohraničené jednou větví cykloidy $x = r\,(t - \sin t)$, $y = r\,(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Řešení.

$$\boxed{P = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\,|\varphi'(t)|\ \mathrm{d}t}$$



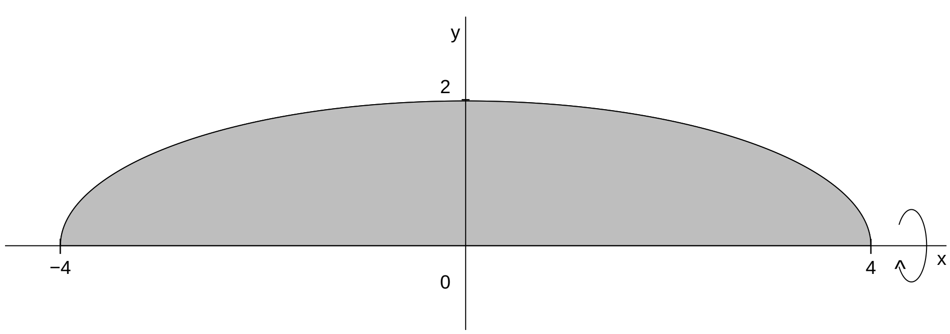
Jak vzniká cykloida? Zájemci se mohou podívat na `https://cs.wikipedia.org/wiki/Cykloida`.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P(A)} &= \int_0^{2\pi} r\,(1-\cos t)\,|r\,(1-\cos t)|\ \mathrm{d}t = r^2\int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\ \mathrm{d}t = r^2\int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right)\ \mathrm{d}t \\
&= r^2\int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1}{2}\,(1+\cos 2t)\right)\ \mathrm{d}t = r^2\int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\right)\ \mathrm{d}t \\
&= r^2\left(\frac{3}{2}\,[t]_0^{2\pi} - 2\,[\sin t]_0^{2\pi} + \frac{1}{4}\,[\sin 2t]_0^{2\pi}\right) = 3\pi r^2
\end{aligned}$$

Příklad 2. (Objem rotačního tělesa - parametrické vyjádření.)
Spočítejte objem elipsoidu vzniklého rotací elipsy dané parametrickými rovnicemi $x = 4\cos t$, $y = 2\sin t$, $t \in [0, \pi]$ kolem osy x.

Řešení.

$$\boxed{V_x = \pi\int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t)\,|\varphi'(t)|\ \mathrm{d}t}$$

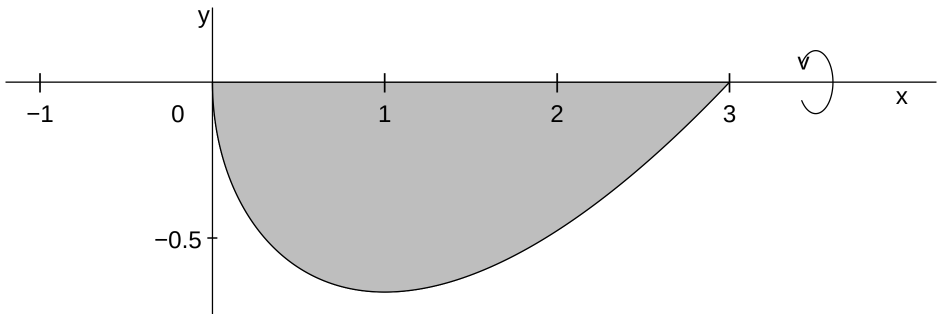


$$\begin{aligned}
V_x &= \pi\int_0^{\pi} 4\sin^2 t\,|{-4}\sin t|\ \mathrm{d}t = 16\pi\int_0^{\pi} \sin^3 t\,\mathrm{d}t = \left|\begin{array}{ll} \cos t = v & t = 0 \to v = 1 \\ \mathrm{d}t = -\frac{1}{\sin t}\,\mathrm{d}v & t = \pi \to v = -1 \end{array}\right| = -16\pi\int_1^{-1} \left(1 - v^2\right)\ \mathrm{d}v \\
&= 16\pi\int_{-1}^{1} \left(1 - v^2\right)\ \mathrm{d}v = 16\pi\left([v]_{-1}^{1} - \frac{1}{3}\left[v^3\right]_{-1}^{1}\right) = 16\pi\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) = \frac{64}{3}\pi
\end{aligned}$$

Příklad 3. (Povrch rotačního tělesa - parametrické vyjádření.)
Spočítejte povrch tělesa, které vznikne rotací křivky $x = t^2$, $y = \frac{1}{3}t\left(t^2-3\right)$, $t \in \left[0, \sqrt{3}\right]$ kolem osy x.

Řešení.

$$\boxed{\mathrm{P_x} = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |\psi(t)| \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\,\mathrm{d}t}$$



$$\left.\begin{array}{l}\varphi(t) = t^2 \Rightarrow \varphi'(t) = 2t \\ \psi(t) = \frac{t^3}{3} - t \Rightarrow \psi'(t) = t^2 - 1, \left(\psi'(t)\right)^2 = \left(t^2-1\right)^2 = t^4 - 2t^2 + 1\end{array}\right\} \left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2 = t^4 + 2t^2 + 1 = \left(t^2+1\right)^2$$

$$\mathrm{P_x} = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \left|\frac{t^3}{3} - t\right| \sqrt{\left(t^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}t = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \left|\frac{t^3}{3} - t\right| \left(t^2+1\right)\,\mathrm{d}t \overset{!!!}{=} 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} -\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\left(t^2+1\right)\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{2}{3}\pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(t^5 - 2t^3 - 3t\right)\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\left[t^6\right]_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\left[t^4\right]_0^{\sqrt{3}} - \frac{3}{2}\left[t^2\right]_0^{\sqrt{3}}\right) = 3\pi$$

Poznámka. Je výraz $\dfrac{t^3}{3} - t$ na $\left[0, \sqrt{3}\right]$ kladný?

$$\frac{t^3}{3} - t = \frac{t^3 - 3t}{3} = \frac{1}{3}t(t^2-3) = 0 \rightarrow \text{ nulové body: } 0, \pm\sqrt{3}$$