Integrace iracionálních funkcí

- **I. Integrály typu**

$$\int R\left(x,\ \sqrt[q_1]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ \sqrt[q_2]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ \ldots,\ \sqrt[q_m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x,$$

kde R je racionální funkce $m+1$ proměnných a $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$, $ad-bc \neq 0$.
- substituce:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^s,$$

kde s je nejmenší společný násobek čísel $q_1,\ q_2, \ldots,\ q_m$; dostáváme

$$x = \frac{\mathrm{d}t^s - b}{a - ct^s}.$$

- **II. Integrály typu**

$$\int R\left(x, \sqrt{px^2+qx+r}\right),$$

kde $R(u,v) = \dfrac{P(u,v)}{Q(u,v)}$ je racionální funkce dvou proměnných $u,\ v$ a $p,\ q,\ r \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$.
Polynom px^2+qx+r má:

- dvojnásobný reálný kořen $\longrightarrow$ integrace racionální funkce;
- dva různé reálné kořeny $\longrightarrow$ integrál typu

$$\int R\left(x,\ \sqrt[q_1]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ \sqrt[q_2]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ \ldots,\ \sqrt[q_m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x;$$

- komplexní kořeny $\longrightarrow$ jednoduchými úpravami a lineární substitucí převedeme na tvar

$$\int R\left(x, \sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}x,$$

tento integrál můžeme počítat využitím

(a) **Eulerovy substituce**

$$x = \frac{t^2-1}{2t}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{t^2+1}{2t^2}\,\mathrm{d}t$$

$\longrightarrow$ integrál z racionální funkce (substituce někdy ve tvaru $\sqrt{1+x^2} = t-x$),

(b) **goniometrické substituce**

$$x = \operatorname{tg} t, \qquad \mathrm{d}x = \frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$\longrightarrow$ integrál z funkce $\int R(\cos t, \sin t)$,

(c) **hyperbolické substituce**

$$\begin{aligned} x &= \sinh t, \quad \mathrm{d}x = \cosh t\,\mathrm{d}t, \quad \text{nebo} \\ x &= \cosh t, \quad \mathrm{d}x = \sinh t\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ integrál z funkce $R(\cosh t, \sinh t)$ + použití Druhé substituční metody.

- **II. Integrály typu**

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x,$$

kde $A,\ B,\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$, $a \neq 0$, lze řešit převedením na součet integrálů

$$K\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,\mathrm{d}x + L\int \frac{1}{\sqrt{f(x)}}\,\mathrm{d}x.$$

Integrály typu $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$, kde $D>0,\ a<0$

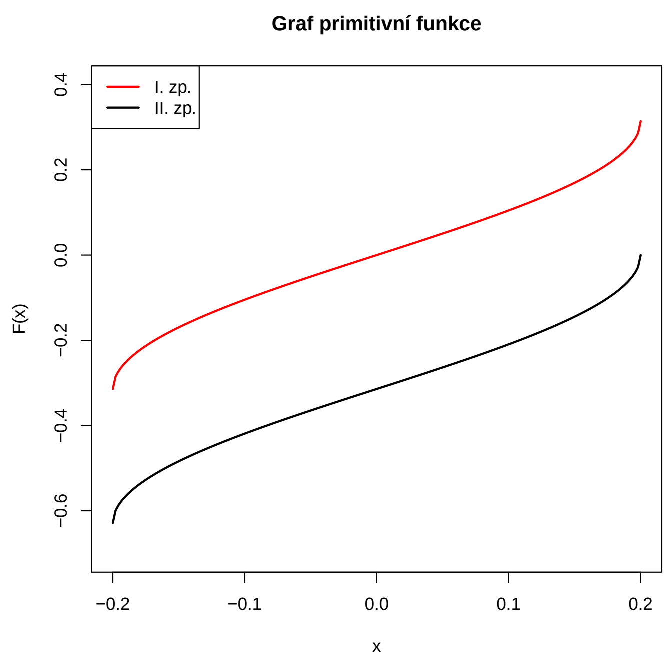
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}\,\mathrm{d}x \overset{\text{I.zp.}}{=} \int \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\arcsin(5x)+c$$

$$\overset{\text{II.zp.}}{=} \int \frac{1}{\sqrt{(1-5x)(1+5x)}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1-5x}{1+5x}\,(1+5x)^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(1+5x)\,\sqrt{\frac{1-5x}{1+5x}}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left| \frac{1-5x}{1+5x} = t^2 \rightarrow x = -\frac{1}{5}\cdot\frac{t^2-1}{t^2+1}, \mathrm{d}x = -\frac{1}{5}t\left(1-\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2 \right|$$

$$= \int \frac{1}{\left(1-\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)t}\cdot\frac{-1}{5}\,t\left(1-\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{5}\int\left(1-\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t = -\frac{1}{5}\int\frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{2}{5}\operatorname{arctg} t + c = -\frac{2}{5}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-5x}{1+5x}}+c$$



$$\int \frac{1}{\sqrt{-3x^2+6x+4}} = \int \frac{1}{\sqrt{-3\left((x-1)^2-\frac{7}{3}\right)}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{7-3\,(x-1)^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{7\,(1-\frac{3}{7}(x-1)^2)}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{3}{7}}x-\sqrt{\frac{3}{7}}\right)^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{7}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{7}}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{7}}x-\sqrt{\frac{3}{7}}\right)+c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\,(x-1)\right)+c$$

doplnění na čtverec: $-3x^2+6x+4 = -3\left(x^2-2x-\frac{4}{3}\right) = -3\left(x^2-2x+1-\frac{7}{3}\right) = -3\left((x-1)^2-\frac{7}{3}\right)$

Integrály typu $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{1+x^2}\right)\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \left|\sqrt{x^2+1}+x=t \to \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}t\right| = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln|t|+c = \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+c$$

Integrály typu $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x = K\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,\mathrm{d}x + L\int \frac{1}{\sqrt{f(x)}}\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2x+2+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\sqrt{x^2+2x+3} + \ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+2}\right|+c\end{aligned}$$

- $\displaystyle\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,\mathrm{d}x = \left|x^2+2x+3=t^2 \to \mathrm{d}x = \frac{2t}{2x+2}\,\mathrm{d}t\right| = 2t+c = 2\sqrt{x^2+2x+3}+c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,\mathrm{d}x = \left|\text{doplnění na čtverec: } x^2+2x+3=(x+1)^2+2\right| = \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+2}}\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}&= \int \frac{1}{\sqrt{2}\left[1+\frac{1}{2}(x+1)^2\right]}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \left|\text{využitím } \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}+c\right|\right| = \ln\left|\frac{x+1}{\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{(x+1)^2+2}{2}}\right|+c \\ &= \ln\left|\frac{x+1+\sqrt{(x+1)^2+2}}{\sqrt{2}}\right|+c = \ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+2}\right|+c\end{aligned}$$