Integrace goniometrických funkcí

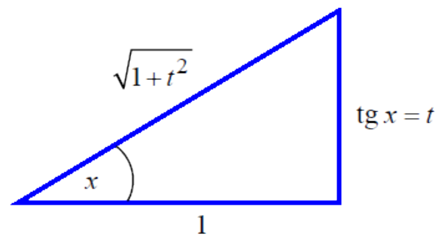
- **I. Integrály typu**

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x,$$

kde $R(u,v) = \frac{P(u,v)}{Q(u,v)}$ je racionální funkce 2 proměnných $u = \sin x$ a $v = \cos x$, lze převést na integrál z racionální funkce při substituci:

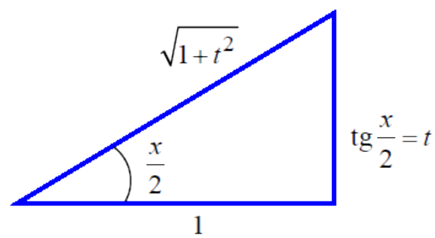
1. $R(-u,v) = -R(u,v) \longrightarrow \cos x = t$
2. $R(u,-v) = -R(u,v) \longrightarrow \sin x = t$
3. $R(-u,-v) = R(u,v) \longrightarrow \operatorname{tg} x = t$

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$
$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$
$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$



4. ostatní případy $\longrightarrow \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$$



- **II. Integrály typu**

$$\int \sin\alpha x \cdot \sin\beta x\,\mathrm{d}x,\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$$

- k výpočtu integrálů $\int \sin\alpha x \cdot \sin\beta x\,\mathrm{d}x$, $\int \sin\alpha x \cdot \cos\beta x\,\mathrm{d}x$, $\int \cos\alpha x \cdot \cos\beta x\,\mathrm{d}x$
- vzorce:

$$\sin\alpha x \cdot \sin\beta x = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha-\beta\right)x - \cos\left(\alpha+\beta\right)x\right)$$
$$\cos\alpha x \cdot \cos\beta x = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha-\beta\right)x + \cos\left(\alpha+\beta\right)x\right)$$
$$\sin\alpha x \cdot \cos\beta x = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\alpha+\beta\right)x + \sin\left(\alpha-\beta\right)x\right)$$

- **III. Integrály typu**

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x\,\mathrm{d}x,\ m,\ n \in \mathbb{N}_0 \text{ sudá}$$

- vzorce:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right)$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2x\right)$$
$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$$

$$
\begin{aligned}
\int \sin^3 x \, \cos^3 x \, \mathrm{d}x &= |\cos x = t| = \cdots = \frac{1}{6}\cos^6 x - \frac{1}{4}\cos^4 x + c \\
&= |\sin x = t| = \cdots = \frac{1}{4}\sin^4 x - \frac{1}{6}\sin^6 x + c \\
&= |\mathrm{tg} x = t| = \cdots = \int \frac{t^3}{(1+t^2)^4}\mathrm{d}t =
\end{aligned}
$$

I. zp.: rozklad na PZ $\rightarrow$ itentegrál z racionální lomené funkce typu II pro $k > 1$ (nepožaduji)

II. zp.: zavedením další substituce $\left|t^2 + 1 = u\right| = \cdots = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u^4}\right)\mathrm{d}u = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{u^2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{u^3} + c$

$$
= -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(\mathrm{tg}^2 x + 1\right)^2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\left(\mathrm{tg}^2 x + 1\right)^3} + c
$$

$$
= \left|\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t\right| = 16\int \frac{t^3\cdot(1-t^2)^3}{(1+t^2)^7}\,\mathrm{d}t = \left|1 + t^2 = u\right| = 8\int \frac{(u-1)(2-u)^3}{u^7}\,\mathrm{d}u
$$

$$
= 8\left(-\frac{u^{-2}}{-2} + 7\cdot\frac{u^{-3}}{-3} - 18\cdot\frac{u^{-4}}{-4} + 20\cdot\frac{u^{-5}}{-5} - 8\cdot\frac{u^{-6}}{-6}\right) + c, \text{ kde } u = 1 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}
$$