

INTEGRACE RACIONÁLNÍ LOMENÉ FUNKCE

- rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky:

TYP I: $\int \frac{A}{(ax+b)^k} dx, k \in \mathbb{N}, a \neq 0, A \neq 0$ - vede na integrály typu $\int f(ax+b) dx$ nebo substituci $ax+b=t$

TYP II: $\int \frac{Bx+C}{(px^2+qx+r)^k} dx, k \in \mathbb{N}, p \neq 0, q^2 - 4pr < 0, B^2 + C^2 \neq 0$:

- $k = 1$ - integrand vhodné upravit na tvar

$$K \underbrace{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx}_= \ln|f(x)| + L \underbrace{\int \frac{1}{f(x)} dx}_{\text{integrály vedoucí na arctg}}$$

- $k > 1, k \in \mathbb{N}$ - úprava integrandu na tvar

$$K \int \frac{f'(x)}{(f(x))^k} dx + L \underbrace{\int \frac{1}{(f(x))^k} dx}$$

upravíme na tvar $\frac{1}{(t^2+a^2)^k}$ a primitivní funkci určíme užitím rekurentního vztahu

$$\int \frac{1}{(t^2+a^2)^{k+1}} dt = \frac{1}{2ka^2} \left(\frac{t}{(t^2+a^2)^k} + (2k-1) \int \frac{1}{(t^2+a^2)^k} dt \right)$$

$$\int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx$$

Řešení:

- dělení polynomů:

- rozklad polynomu ve jmenovateli na součin kořenových činitelů:

$$x^3 - x^2 + x - 1 =$$

- rozklad na parciální zlomky:

$$\frac{2}{(x-1)(x^2+1)} =$$

$$\Rightarrow \frac{2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1}$$

- úprava výrazu $\frac{x+1}{x^2+1}$ (integrace racionální funkce, typ II):

$$\frac{x+1}{x^2+1} =$$

- celkem dostáváme integrál:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx &= \int \left(x + 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1} \right) dx \\ &= \int \left(x + 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| - \operatorname{arctg} x + c \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x + \ln \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}} - \operatorname{arctg} x + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{x}{x^3 - 1} dx$$

Řešení:

- rozklad polynomu ve jmenovateli na součin kořenových činitelů:

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

- rozklad na parciální zlomky:

$$\frac{x}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} =$$

$$\Rightarrow \frac{x}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{1}{3(x - 1)} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x - 1}{x^2 + x + 1}$$

- úprava výrazu $\frac{x-1}{x^2+x+1}$ (integrace racionální funkce, typ II):

$$\frac{x - 1}{x^2 + x + 1} =$$

- úprava výrazu $\frac{1}{x^2 + x + 1}$:

◦ úprava na čtverec:

◦ další úpravy:

\Rightarrow dostáváme:

$$\frac{1}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{\frac{3}{4} \left[1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right]} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2}$$

- celkem dostáváme integrál:

$$\int \frac{x}{x^3 - 1} dx = \int \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x - 1}{x^2 + x + 1} \right) dx = \int \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + x + 1} \right) \right) dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x - 1| - \frac{1}{6} \ln|x^2 + x + 1| + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + c$$

$$= \frac{1}{3} \ln \frac{|x - 1|}{\sqrt{x^2 + x + 1}} + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + c$$

$$\int \frac{3x+1}{(x^2+2)^2} dx$$

Řešení:

$$\int \frac{3x+1}{(x^2+2)^2} dx = \int \frac{2x \cdot \frac{3}{2} + 1}{(x^2+2)^2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{(x^2+2)^2} dx + \int \frac{1}{(x^2+2)^2} dx = \frac{3}{2} I_1 + I_2$$

$$\bullet \quad I_1 = \int \frac{2x}{(x^2+2)^2} dx = |x^2+2=t| = \int \frac{1}{t^2} dt = \int t^{-2} dt = -\frac{1}{t} + c = -\frac{1}{x^2+2} + c$$

$$\bullet \quad I_2 = \int \frac{1}{(x^2+2)^2} dx = \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 2} \left(\frac{x}{x^2+2} + (2 \cdot 1 - 1) \int \frac{1}{x^2+2} dx \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{x}{x^2+2} + \int \frac{1}{2(\frac{x^2}{2}+1)} dx \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{2} \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + c$$

Celkem tedy

$$\int \frac{3x+1}{(x^2+2)^2} dx = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^2+2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{x^2+2} + \frac{\sqrt{2}}{8} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + c = \frac{1}{4} \cdot \frac{x-6}{x^2+2} + \frac{\sqrt{2}}{8} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + c$$

Pozn. Integrál I_2 počítáme s využitím vztahu

$$\int \frac{1}{(t^2+a^2)^{k+1}} dt = \frac{1}{2ka^2} \left(\frac{t}{(t^2+a^2)^k} + (2k-1) \int \frac{1}{(t^2+a^2)^k} dt \right)$$