ŘEŠENÍ SYSTÉMŮ LINEÁRNÍCH ROVNIC

- zabýváme se řešením systému lineárních rovnic

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

- maticový zápis:

$$A\vec{x} = \vec{b}, \text{ kde}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

LU rozklad:

- rozklad matice soustavy A na součin horní (U) a dolní (L) trojúhelníkové matice ve tvaru

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix},$$

  kde prvky $m_{ij},\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n$ se nazývají multiplikátory

Postup pro výpočet:

- GAUSSOVA ELIMINAČNÍ METODA (GEM) BEZ VÝMĚNY ŘÁDKŮ:
  Platí $A = L \cdot U$, tedy

$$
\begin{aligned}
A\vec{x} &= \vec{b} \\
L\underbrace{U\vec{x}}_{\vec{y}} &= \vec{b} \quad \longrightarrow \quad 1.\ L\vec{y} = \vec{b} \longrightarrow \vec{y} \\
& \qquad\qquad\qquad\;\; 2.\ U\vec{x} = \vec{y} \longrightarrow \vec{x}
\end{aligned}
$$

- GEM S ČÁSTEČNÝM VÝBĚREM HLAVNÍHO PRVKU (PIVOTA):
  Platí $P \cdot A = L \cdot U$, kde P je permutační matice (více na cvičeních), tedy

$$
\begin{aligned}
P \cdot A\vec{x} &= P \cdot \vec{b} \\
L\underbrace{U\vec{x}}_{\vec{y}} &= P \cdot \vec{b} \quad \longrightarrow \quad 1.\ L\vec{y} = P \cdot \vec{b} \longrightarrow \vec{y} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\;\; 2.\ U\vec{x} = \vec{y} \longrightarrow \vec{x}.
\end{aligned}
$$

Příklad 1. Řešte systém lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= -1 \\ - x_2 \ + 2x_3 &= 4 \\ -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= -4 \end{aligned}$$

a) pomocí GEM bez výměny řádků,

b) pomocí GEM s částečným výběrem pivota.

Řešení.

a) **GEM bez výměny řádků:**

- úprava na schodovitý tvar:

- LU rozklad matice soustavy:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

- řešení pomocí LU rozkladu:

1. řešení $L\overrightarrow{y} = \overrightarrow{b}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -18 \end{pmatrix}$$

2. řešení $U\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array}\right) \Rightarrow \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Poznámka. Sami si můžete ověřit platnost rovnosti $A = L \cdot U$:

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & -4 \end{pmatrix} = A.$$

b) $\boxed{\textbf{GEM s částečným výběrem pivota:}}$

- úprava na schodovitý tvar:

- LU rozklad matice soustavy:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- permutační matice P

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- řešení pomocí LU rozkladu:
  1. řešení $L\overrightarrow{y} = P\overrightarrow{b}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

  2. řešení $U\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & -4 & -4 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Poznámka. Ověření rovnosti $P \cdot A = L \cdot U$:

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešený příklad. Řešte systém lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 6x_2 + 4x_3 &= 10 \end{aligned}$$

a) pomocí GEM bez výměny řádků,

b) pomocí GEM s částečným výběrem pivota.

Řešení.

a) $\boxed{\textbf{GEM bez výměny řádků:}}$

- úprava na schodovitý tvar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- LU rozklad matice soustavy:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- řešení pomocí LU rozkladu:

  1. řešení $L\vec{y} = \vec{b}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & \frac{1}{2} & 1 & 10 \end{array}\right) \Rightarrow \vec{y} = \begin{pmatrix} 6 \\ -22 \\ -3 \end{pmatrix}$$

  2. řešení $U\vec{x} = \vec{y}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -4 & -6 & -22 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Poznámka. Ověření rovnosti $A = L \cdot U$:

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix} = A.$$

b) $\boxed{\textbf{GEM s částečným výběrem pivota:}}$

- úprava na schodovitý tvar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- LU rozklad matice soustavy:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- permutační matice P

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- řešení pomocí LU rozkladu:
  1. řešení $L\overrightarrow{y} = P\overrightarrow{b}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 10 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow \overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

  2. řešení $U\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Poznámka Ověření rovnosti $P \cdot A = L \cdot U$:

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$