DISKRÉTNÍ METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

- využití: prokládání dat křivkami, řešení přeurčených systémů lineárních rovnic
- obecná formulace úlohy: Pro dané vektory $\overrightarrow{\varphi} \in \mathbb{R}^k$ a $\overrightarrow{\varphi}^{(1)}, \overrightarrow{\varphi}^{(2)}, \ldots, \overrightarrow{\varphi}^{(n)} \in \mathbb{R}^k$, $n < k$ najděte koeficienty $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tak, že pro vektor $\overrightarrow{\varphi}^* = c_1\overrightarrow{\varphi}^{(1)} + \cdots + c_n\overrightarrow{\varphi}^{(n)} = X\overrightarrow{c}$, kde $X = \left(\overrightarrow{\varphi}^{(1)}, \overrightarrow{\varphi}^{(2)}, \ldots, \overrightarrow{\varphi}^{(n)}\right)_{k\times n}$, je norma $\|\overrightarrow{\varphi} - \overrightarrow{\varphi}^*\|_2$ minimální.
- konstrukce: neznámé koeficienty $c_1, c_2 \ldots, c_n$ dostáváme jako řešení soustavy lineárních rovnic, tzv. *normálních rovnic*:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \langle\overrightarrow{\varphi}^{(1)}, \overrightarrow{\varphi}^{(1)}\rangle & \langle\overrightarrow{\varphi}^{(1)}, \overrightarrow{\varphi}^{(2)}\rangle & \cdots & \langle\overrightarrow{\varphi}^{(1)}, \overrightarrow{\varphi}^{(n)}\rangle \\ \langle\overrightarrow{\varphi}^{(1)}, \overrightarrow{\varphi}^{(2)}\rangle & \langle\overrightarrow{\varphi}^{(2)}, \overrightarrow{\varphi}^{(2)}\rangle & \cdots & \langle\overrightarrow{\varphi}^{(2)}, \overrightarrow{\varphi}^{(n)}\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle\overrightarrow{\varphi}^{(1)}, \overrightarrow{\varphi}^{(n)}\rangle & \langle\overrightarrow{\varphi}^{(2)}, \overrightarrow{\varphi}^{(n)}\rangle & \cdots & \langle\overrightarrow{\varphi}^{(n)}, \overrightarrow{\varphi}^{(n)}\rangle \end{pmatrix}}_{X^T X} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{c}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \langle\overrightarrow{\varphi}, \overrightarrow{\varphi}^{(1)}\rangle \\ \langle\overrightarrow{\varphi}, \overrightarrow{\varphi}^{(2)}\rangle \\ \vdots \\ \langle\overrightarrow{\varphi}, \overrightarrow{\varphi}^{(n)}\rangle \end{pmatrix}}_{X^T\overrightarrow{\varphi}} \tag{1}$$

Příklad 1. Metodou nejmenších čtverců řešte přeurčenou soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 \qquad + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 \qquad &= 1. \end{aligned}$$

Řešení.

Příklad 2. Metodou nejmenších čtverců řešte přeurčenou soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 &= -1. \end{aligned}$$

Řešení.

$$\overrightarrow{\varphi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{\varphi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{\varphi} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{matice plánu: } X = \begin{pmatrix} \overrightarrow{\varphi}^{(1)} & \overrightarrow{\varphi}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- součin $X^T X$:

$$X^T X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

- součin $X^T \overrightarrow{\varphi}$:

$$X^T \overrightarrow{\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- systém normálních rovnic $X^T X \overrightarrow{c} = X^T \overrightarrow{\varphi}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{14}{3} & -\frac{7}{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \quad \Rightarrow \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- odhad $\overrightarrow{\varphi}^*$:

$$\overrightarrow{\varphi}^* = X \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

- chyba aproximace: $\|\overrightarrow{\varphi} - \overrightarrow{\varphi}^*\|_2 = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{7}{2}} \doteq 1.8708$