ITERAČNÍ METODY PRO ŘEŠENÍ SYSTÉMŮ LINEÁRNÍCH ROVNIC

Budeme se zabývat řešením soustavy lineárních rovnic

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$$

s regulární maticí soustavy A.
Princip iteračních metod: převést soustavu $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ na systém $\overrightarrow{x} = T\overrightarrow{x} + \overrightarrow{d}$ s iterační maticí T.
Iterační proces:

$$\overrightarrow{x}^{(i+1)} = T\overrightarrow{x}^{(i)} + \overrightarrow{d},$$

vhodnou volbou iterační matice T a vektoru $\overrightarrow{d}$ dostáváme konkrétní iterační metodu.
STOP podmínka:

$$\|\overrightarrow{x}^{(i+1)} - \overrightarrow{x}^{(i)}\|_\infty < \varepsilon$$

Rozklad matice soustavy A:

$$A = D + L + U,$$

kde D značí diagonální matici, L dolní trojúhelníkovou matici bez diagonály a U horní trojúhelníkovou matici bez diagonály:

$$D = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

JACOBIOVA ITERAČNÍ METODA

Soustavu

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$$

řešíme rozkladem matice $A = D + L + U$. Postupnými úpravami

$$\begin{aligned} A\overrightarrow{x} &= \overrightarrow{b} \\ (D+L+U)\overrightarrow{x} &= \overrightarrow{b} \\ D\overrightarrow{x} &= -(L+U)\overrightarrow{x} + \overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{x} &= -D^{-1}(L+U)\overrightarrow{x} + D^{-1}\overrightarrow{b} \end{aligned}$$

dostáváme iterační proces ve tvaru

$$\overrightarrow{x}^{(i+1)} = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{T_J}\overrightarrow{x}^{(i)} + \underbrace{D^{-1}\overrightarrow{b}}_{\overrightarrow{d}_J}$$

s iterační maticí T_J.

GAUSSOVA-SEIDELOVA ITERAČNÍ METODA

Soustavu

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$$

řešíme rozkladem matice $A = D + L + U$. Postupnými úpravami

$$\begin{aligned} A\overrightarrow{x} &= \overrightarrow{b} \\ (D+L+U)\overrightarrow{x} &= \overrightarrow{b} \\ (D+L)\overrightarrow{x} &= -U\overrightarrow{x} + \overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{x} &= -(D+L)^{-1}U\overrightarrow{x} + (D+L)^{-1}\overrightarrow{b} \end{aligned}$$

dostáváme iterační proces ve tvaru

$$\overrightarrow{x}^{(i+1)} = \underbrace{-(D+L)^{-1}U}_{T_{GS}}\overrightarrow{x}^{(i)} + \underbrace{(D+L)^{-1}\overrightarrow{b}}_{\overrightarrow{d}_{GS}}$$

s iterační maticí T_{GS}.

Konvergence metod:

- A ryze řádkově diagonálně dominantní:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad i = 1, \ldots, n$$

A - ryze řádkově diagonálně dominantní $\Rightarrow$ konvergence pro libovolnou počáteční aproximaci $\overrightarrow{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Pozn. A ryze sloupcově diagonálně dominantní: $|a_{ii}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}| \quad j = 1, \ldots, n$

Příklad 1. Danou soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 \ + x_3 \ &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \ &= 4 \\ -x_1 - x_2 \ - 3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

řešte Jacobiovou i Gaussovou-Seidelovou metodou. Zvolte počáteční aproximaci $\overrightarrow{x} = (0, 0, 0)^T$ a $\varepsilon = 0.001$.

Řešení.

- Jacobiova metoda:

i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$x_3^{(i)}$	$\|\overrightarrow{x}^{(i)} - \overrightarrow{x}^{(i-1)}\|_\infty$
0	0	0	0	–
1	0.6667	1.0000	0.3333	1.0000
2	0.2222	0.5833	-0.2222	0.5555
3	0.5463	0.9445	0.0648	0.3612
4	0.3302	0.7107	-0.1636	0.2338
5	0.4843	0.8758	-0.0136	0.1651
6	0.3793	0.7613	-0.12	0.1145
7	0.4529	0.8403	-0.0469	0.079
8	0.4022	0.7853	-0.0977	0.055
9	0.4375	0.8233	-0.0625	0.038
10	0.4131	0.7969	-0.0869	0.0264
11	0.43	0.8152	-0.07	0.0183
12	0.4183	0.8025	-0.0817	0.0127
13	0.4264	0.8113	-0.0736	0.0088
14	0.4208	0.8052	-0.0792	0.0061
15	0.4247	0.8094	-0.0753	0.0042
16	0.422	0.8065	-0.078	0.0029
17	0.4238	0.8085	-0.0762	0.002
18	0.4226	0.8072	-0.0774	0.0013
19	0.4234	0.8081	-0.0766	0.0009

- Gaussova-Seidelova metoda:

i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$x_3^{(i)}$	$\|\overrightarrow{x}^{(i)} - \overrightarrow{x}^{(i-1)}\|_\infty$
0	0	0	0	–
1	0.6667	0.6667	-0.1111	0.6667
2	0.4815	0.7870	-0.0895	0.1852
3	0.4342	0.8053	-0.0798	0.0473
4	0.4248	0.8075	-0.0775	0.0094
5	0.4233	0.8077	-0.0770	0.0015
6	0.4231	0.8077	-0.0769	0.0002

Příklad 2. Danou soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 10x_1 + 4x_2 \ - 5x_3 &= 3 \\ x_1 + 12x_2 - 10x_3 &= -5 \\ x_1 + 5x_2 \ - 8x_3 &= -13 \end{aligned}$$

řešte Jacobiovou i Gaussovou-Seidelovou metodou. Zvolte počáteční aproximaci $\overrightarrow{x} = (0,0,0)^T$ a $\varepsilon = 0.1$.

Řešení.

matice soustavy $A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -5 \\ 1 & 12 & -10 \\ 1 & 5 & -8 \end{pmatrix}$ je ryze řádkově diagonálně dominantní ($10 > 4 + 5$, $12 > 1 + 10$, $8 > 1 + 5$)

- Jacobiova metoda

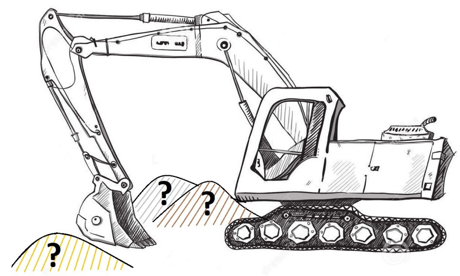
i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$x_3^{(i)}$	$\Vert\overrightarrow{x}^{(i)} - \overrightarrow{x}^{(i-1)}\Vert_\infty$
0	0.0000	0.0000	0.0000	–
1	0.3000	-0.4167	1.6250	1.6250
2	1.2792	0.9125	1.4021	1.3292
3	0.6361	0.6451	2.3552	0.9531
4	1.2196	1.4930	2.1077	0.8479
5	0.7566	1.2381	2.7106	0.6029
6	1.1601	1.7791	2.4934	0.5410
7	0.8351	1.5645	2.8820	0.3886
8	1.1152	1.9154	2.7072	0.3509
9	0.8874	1.7464	2.9615	0.2543
10	1.0822	1.9773	2.8274	0.2309
11	0.9228	1.8493	2.9961	0.1687
12	1.0583	2.0032	2.8962	0.1539
13	0.9468	1.9086	3.0093	0.1131
14	1.0412	2.0122	2.9362	0.1036
15	0.9632	1.9434	3.0128	0.0780

- Gaussova-Seidelova metoda:

i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$x_3^{(i)}$	$\Vert\overrightarrow{x}^{(i)} - \overrightarrow{x}^{(i-1)}\Vert_\infty$
0	0.0000	0.0000	0.0000	–
1	0.3000	-0.4417	1.3865	1.3865
2	1.1699	0.6413	2.1720	1.0830
3	1.1295	1.2992	2.5782	0.6579
4	1.0694	1.6427	2.7854	0.3435
5	1.0356	1.8182	2.8908	0.1755
6	1.0181	1.9075	2.9444	0.0893

Řešený příklad z praxe.
Stavební inženýr požaduje pro realizaci svého projektu 4 800 m^3 písku, 5 800 m^3 jemného štěrkopísku a 5 700 m^3 hrubého štěrkopísku. Těžební společnost má k těžbě tohoto materiálu k dispozici tři jámy s následujícím zastoupením:

	písek [%]	hrubý štěrkopísek [%]	jemný štěrkopísek [%]
jáma č. 1	52	30	18
jáma č. 2	20	50	30
jáma č. 3	25	15	55



Zdroj: [1] + vlastní úprava

Kolik m^3 písku, jemného a hrubého štěrkopísku má být z každé jámy vytěženo, aby byly pokryty potřeby inženýra? Volte $\varepsilon = 0.01$ a řešte pomocí Jacobiovy i Gaussovy-Seidelovy metody.

Řešení.
Označme x, y a z množství materiálu, který má být (v tomto pořadí) vytěžen z první, druhé a třetí jámy. Dostáváme tak soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned}\frac{52}{100}x + \frac{20}{100}y + \frac{25}{100}z &= 4800\\ \frac{30}{100}x + \frac{50}{100}y + \frac{15}{100}z &= 5800\\ \frac{18}{100}x + \frac{30}{100}y + \frac{55}{100}z &= 5700,\end{aligned}$$

kde $\overrightarrow{x} = (x, y, z)^T$. Výpočet s maticí soustavy složené z přirozených čísel je pro nás pohodlnější, proto z ní vytkneme hodnotu $\frac{1}{100}$. Dostáváme novou soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned}52x_1 + 20y_1 + 25z_1 &= 4800\\ 30x_1 + 50y_1 + 15z_1 &= 5800\\ 18x_1 + 30y_1 + 55z_1 &= 5700\end{aligned}$$

s maticí soustavy

$$A = \begin{pmatrix} 52 & 20 & 25\\ 30 & 50 & 15\\ 18 & 30 & 55\end{pmatrix},$$

kde $x_1 = \frac{x}{100}$, $y_1 = \frac{y}{100}$, $z_1 = \frac{z}{100}$. Označme $\overrightarrow{x}_1 = (x_1,\ y_1,\ z_1)^T$. Řešení získaná pomocí Jacobiovy a Gassovy-Seidelovy metody bude z tohoto důvodu potřeba na konci výpočtu ještě vynásobit hodnotou 100.
Matice A je ryze řádkově diagonálně dominantní ($52 > 20 + 25$, $50 > 30 + 15$, $55 > 18 + 30$), můžeme tedy pro libovolnou volbu počáteční aproximace odhadnout potřebné množství materiálu, které je třeba vytěžit z jam.
Volba počáteční aproximace:

$$\overrightarrow{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^T.$$

- $\boxed{\text{Jacobiova metoda:}}$

Řešíme systém linárních rovnic

$$\begin{pmatrix} 52 & 0 & 0\\ 0 & 50 & 0\\ 0 & 0 & 55\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(i+1)}\\ y_1^{(i+1)}\\ z_1^{(i+1)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -20 & -25\\ -30 & 0 & -15\\ -18 & -30 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(i)}\\ y_1^{(i)}\\ z_1^{(i)}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4800\\ 5800\\ 5700\end{pmatrix}$$

Iterační proces:

i	$x_1^{(i)}$	$y_1^{(i)}$	$z_1^{(i)}$	$\Vert \overrightarrow{x}^{(i)} - \overrightarrow{x}^{(i-1)} \Vert_\infty$
0	0	0	0	–
1	92.308	116.000	103.636	116.000
2	-2.133	29.525	10.154	94.441
3	76.071	114.234	88.230	84.709
4	5.953	43.889	16.431	71.799
5	67.528	107.499	77.749	63.610
$\vdots$				
74	39.072	78.072	48.257	0.009

Množství vytěženého materiálu z první, druhé a třetí jámy je

$$\widehat{\overrightarrow{x}} = 100\,\widehat{\overrightarrow{x}}_1 = \begin{pmatrix} 3\,907.2 \\ 7\,807.2 \\ 4\,825.7 \end{pmatrix}$$

- $\boxed{\text{Gaussova-Seidelova metoda:}}$

Řešíme systém linárních rovnic

$$\begin{pmatrix} 52 & 0 & 0 \\ 30 & 50 & 0 \\ 18 & 30 & 55 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(i+1)} \\ y_1^{(i+1)} \\ z_1^{(i+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -20 & -25 \\ 0 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ y_1^{(i)} \\ z_1^{(i)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4800 \\ 5800 \\ 5700 \end{pmatrix}$$

Iterační proces:

i	$x_1^{(i)}$	$y_1^{(i)}$	$z_1^{(i)}$	$\Vert \overrightarrow{x}^{(i)} - \overrightarrow{x}^{(i-1)} \Vert_\infty$
0	0	0	0	–
1	92.308	60.615	40.364	92.308
2	49.589	74.138	46.969	42.719
3	41.212	77.182	48.049	8.376
4	39.522	77.872	48.226	1.691
5	39.171	78.029	48.255	0.351
$\vdots$				
8	39.077	78.076	48.261	0.004

Množství vytěženého materiálu z první, druhé a třetí jámy je

$$\widehat{\overrightarrow{x}} = 100\,\widehat{\overrightarrow{x}}_1 = \begin{pmatrix} 3\,907.7 \\ 7\,807.6 \\ 4\,826.1 \end{pmatrix}$$

Zdroje:
[1] https://thumbs.dreamstime.com/z/doodle-excavator-drawing-vector-eps-34277567.jpg