## ITERAČNÍ METODY ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH ROVNIC

- řešení nelineární rovnice $f(x) = 0$,
- separace kořenů = hledání intervalu $\langle a, b\rangle$, ve kterém se nachází právě jeden kořen,
- předpoklady: $f$ spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ + musí být splněna podmínka $f(a) \cdot f(b) < 0$

### NEWTONOVA METODA = METODA TEČEN

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$
- iterační vztah:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)},\ f'(x_i) \neq 0,\ i = 0, 1, \ldots$$

- geometrický význam: bod $x_{i+1}$ je průsečík tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $[x_i, f(x_i)]$ s osou $x$
- Fourierovy podmínky = podmínky konvergence:

1. $f(x) \in C^2(I)$
2. $f'(x), f''(x)$ nemění znaménko na $I$
3. volba počáteční aproximace: $x_0$ tak, aby $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$

- STOP podmínky: $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$

### METODA SEČEN

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$
- iterační vztah:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \cdot f(x_i),\ i = 1, 2, \ldots$$

- geometrický význam: bod $x_{i+1}$ je průsečík sečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodech $[x_{i-1}, f(x_{i-1})]$, $[x_i, f(x_i)]$ s osou $x$
- STOP podmínky: $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$

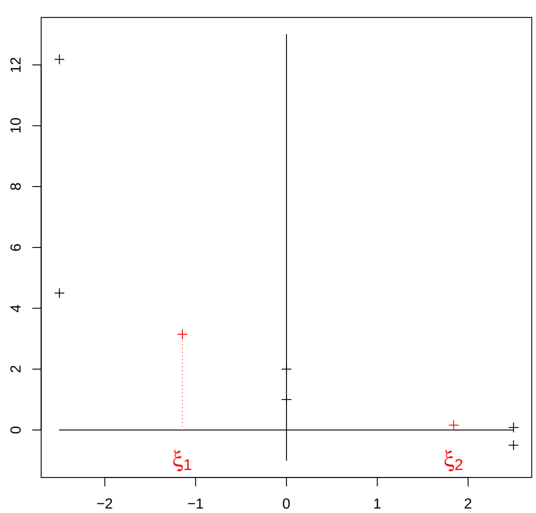
**Příklad 1.** Najděte všechny kořeny rovnice $x + \mathrm{e}^{-x} - 2 = 0$ s přesností 0.01

a) metodou tečen,

b) metodou sečen.

**Řešení.**
SEPARACE KOŘENŮ: hrubý odhad intervalu, určení počátečních aproximací:

$$\begin{aligned} x + \mathrm{e}^{-x} - 2 &= 0 \\ \mathrm{e}^{-x} &= 2 - x \end{aligned}$$




$f(x) = x + \mathrm{e}^{-x} - 2$

- interval pro odhad záporného kořene:

$$\xi_1 \in \langle -2, -1\rangle$$

$$\left.\begin{aligned} f(-2) &= 3.3891 \\ f(-1) &= -0.2817 \end{aligned}\right\} \quad f(-2) \cdot f(-1) < 0$$

- interval pro odhad kladného kořene:

$$\xi_2 \in \langle 0, 2\rangle$$

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= -1 \\ f(2) &= 0.1353 \end{aligned}\right\} \quad f(0) \cdot f(2) < 0$$

a) $\boxed{\textbf{metoda tečen:}}$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)},\ i = 0, 1,\ \ldots$$

$$\text{STOP kritérium: } |x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$$

- odhad záporného kořene:

Fourierovy podmínky:

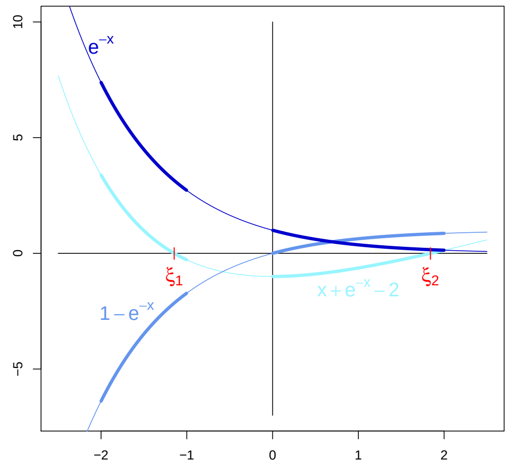
iterační proces:

| $i$ | $x_i$ | $x_{i+1}$ | $\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$ |
|---|---|---|---|
| 0 | | | |
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | -1.1488 | -1.1462 | 0.0026 < 0.01 |

odhad záporného kořene:

$$\hat{x}_1 \doteq -1.1462$$

- odhad kladného kořene:




Fourierovy podmínky:

1. $f(x) = x + \mathrm{e}^{-x} - 2 \in C\langle 0, 2\rangle$
   $f'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x} \in C\langle 0, 2\rangle$
   $f''(x) = \mathrm{e}^{-x} \in C\langle 0, 2\rangle$
2. $f'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ nemění znaménko na $\langle 0, 2\rangle$
   $f''(x) = \mathrm{e}^{-x}$ nemění znaménko na $\langle 0, 2\rangle$
3. volba počáteční aproximace $x_0$ :
   $f(0) = -1$
   $f(2) = 0.1353 \longrightarrow f(2) \cdot f''(2) > 0 \longrightarrow x_0 = 2$

iterační proces:

| $i$ | $x_i$ | $x_{i+1}$ | $\lvert x_{i+1} - x_i\rvert$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 1.8435 | 0.1565 |
| 1 | 1.8435 | 1.8414 | $0.0021 < 0.01$ |

odhad kladného kořene:

$$\hat{x}_2 \doteq 1.8414$$

b) **metoda sečen:**

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \cdot f(x_i),\ i = 1, 2, \ldots$$

$$\text{STOP kritérium: } |x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$$

- odhad záporného kořene:

| $i$ | $x_{i-1}$ | $x_i$ | $x_{i+1}$ | $\lvert x_{i+1} - x_i\rvert$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | 1. krok zadáním intervalu |
| 2 | | | | | |
| 3 | $-1.0767$ | $-1.1543$ | -1.1458 | $0.0085 < 0.01$ | $\Rightarrow \hat{x}_1 \doteq$ -1.1458 |
| 1 | $-2$ | $-1.4696$ | -1.2842 | 0.1854 | 1. krok pomocí metody tečen |
| 2 | $-1.4696$ | $-1.2842$ | -1.1738 | 0.1104 | |
| 3 | $-1.2842$ | $-1.1738$ | -1.1488 | 0.025 | |
| 4 | $-1.1738$ | $-1.1488$ | -1.1462 | $0.0026 < 0.01$ | $\Rightarrow \hat{x}_1 \doteq$ -1.1462 |
| 1 | $-1$ | $-1.1640$ | -1.1442 | 0.0198 | 1. krok pomocí metody tečen |
| 2 | $-1.164$ | $-1.1442$ | -1.1462 | $0.002 < 0.01$ | $\Rightarrow \hat{x}_1 \doteq$ -1.1462 |

- odhad kladného kořene:

| $i$ | $x_{i-1}$ | $x_i$ | $x_{i+1}$ | $\lvert x_{i+1}-x_i\rvert$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 2 | 1.7616 | 0.2384 | 1. krok zadáním intervalu |
| 2 | 2 | 1.7616 | 1.8403 | 0.0787 | |
| 3 | 1.7616 | 1.8403 | 1.8414 | $0.0011 < 0.01$ | $\Rightarrow \hat{x}_2 \doteq 1.8414$ |
| 1 | 2 | 1.8435 | 1.8414 | $0.0021 < 0.01$ | $\Rightarrow \hat{x}_2 \doteq 1.8414$ (1. krok pomocí metody tečen) |
| 1 | 0 | | – | – | metoda tečen nelze použít pro počáteční aproximaci 0 |
| 1 | 0.01 | 100.5058 | 1.0199 | 99.4859 | metoda tečen s počáteční aproximací 0.01 |
| 2 | 100.5058 | 1.0199 | 1.6416 | 0.6217 | |
| 3 | 1.0199 | 1.6416 | 1.8668 | 0.2252 | |
| 4 | 1.6416 | 1.8668 | 1.8409 | 0.0259 | |
| 5 | 1.8668 | 1.8409 | 1.8414 | $0.0005 < 0.01$ | $\Rightarrow \hat{x}_2 \doteq 1.8414$ |

**Řešený příklad z praxe.**

Parašutista padá z klidového stavu. Jeho rychlost $v$ je dána v závislosti na čase rovnicí

$$v(t) = \frac{gm}{c}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t}\right),$$

kde $g = 9.8$ m·s$^{-2}$ a $c = 13$ kg·s$^{-1}$. Předpokládejme, že parašutista váží $m = 95$ kg. Odhadněte dobu, po které parašutista dosáhne rychlosti 35 m·s$^{-1}$

a) metodou tečen,

b) metodou sečen.

Zdroj: [1]

**Řešení.** Vycházíme z rovnice

$$v = \frac{gm}{c}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t}\right)$$

a řešíme $f(t) = 0$, kde

$$f(t) = \frac{gm}{c}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t}\right) - v.$$

Volíme interval $I = \langle 3, 6\rangle$.

a) **metoda tečen**

Ověření Fourierových podmínek:

1. $f(t) = \frac{gm}{c}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t}\right) - v \in C(\langle 3,6\rangle)$
   $f'(t) = \frac{gm}{c}\left(-\mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t}\right)\cdot\frac{-c}{m} = \ldots = g\mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t} \in C(\langle 3,6\rangle)$
   $f''(t) = -\frac{cg}{m}\mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t} \in C(\langle 3,6\rangle)$
2. $f'(t) = g\mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t}$ nemění znaménko na $I$ (funkci si nakreslete!)
   $f''(t) = -\frac{cg}{m}\mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t}$ nemění znaménko na $I$ (funkci si nakreslete!)
3. volba počáteční aproximace $x_0$ :
   $$\left.\begin{aligned} f(3) &= -10.8872 \\ f(6) &= 5.1069 \end{aligned}\right\} f(3)\cdot f''(3) > 0 \longrightarrow x_0 = 3$$

iterační proces:

| $i$ | $x_i$ | $x_{i+1} = g(x_i)$ | $\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 3.0000 | 4.6749 | 1.6749 |
| 1 | 4.6749 | 4.8988 | 0.2239 |
| 2 | 4.8988 | 4.9023 | 0.0035 |
| 3 | 4.9023 | 4.9023 | $0.00000084 < 0.001$ |

odhad kořene:

$$\hat{t} \doteq 4.9023$$

a) $\boxed{\textbf{metoda sečen}}$

iterační proces:

| $i$ | $x_{i-1}$ | $x_i$ | $x_{i+1}$ | $\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 6 | 5.0421 | 0.9579 | 1. krok zadáním intervalu |
| 2 | 6 | 5.0421 | 4.8915 | 0.1506 | |
| 3 | 5.0421 | 4.8915 | 4.9024 | 0.010902 | |
| 4 | 4.8915 | 4.9024 | 4.9023 | $0.00010352 < 0.01$ | $\Rightarrow \hat{t} \doteq 4.9023$ |
| 1 | 3 | 4.6749 | 4.8741 | 0.19922 | 1. krok pomocí metody tečen |
| 2 | 4.6749 | 4.8741 | 4.9019 | 0.027745 | |
| 3 | 4.8741 | 4.9019 | 4.9023 | $0.00043508 < 0.01$ | $\Rightarrow \hat{t} \doteq 4.9023$ |

**Zdroj:** [1] http://www.shapesticker.eu/Samolepka-Parasutista-d49.htm?tab=description