INTERPOLAČNÍ POLYNOM

- aproximace zadaných hodnot nebo hledané funkce f polynomem $F(x)$
- hodnoty zadaných bodů a funkce $F(x)$ se shodují v daných bodech $x_0, x_1, \ldots, x_n$
- značení:
  $x_0, x_1, \ldots, x_n$ vzájemně různé body (uzly)
  $y_0, y_1, \ldots, y_n$ dané hodnoty
  $F(x)$ hledaná funkce (polynom nebo funkce vytvořená z polynomů), pro kterou platí

$$F(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$$

$\mathcal{P}^{(n)}$ množina všech polynomů stupně $\leq n$

LAGRANGEŮV INTERPOLAČNÍ POLYNOM

- interpolační polynom v Lagrangeově tvaru:

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot L_i(x).$$

- fundamentální polynomy:

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot(x_i-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)},\ i = 0, 1, \ldots, n.$$

- Platí: $L_i(x) \in \mathcal{P}^{(n)}$, $L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases} \Rightarrow F(x) = L(x).$

INTERPOLAČNÍ POLYNOM V NEWTONOVĚ TVARU

- interpolační polynom v Newtonově tvaru:

$$N(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots a_n(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot\cdots\cdot(x-x_{n-1}), \text{ kde}$$

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou koeficienty splňující soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a_0 &= y_0 \\ a_0 + a_1\cdot(x_1-x_0) &= y_1 \\ a_0 + a_1(x_2-x_0) + a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1) &= y_2 \\ &\vdots \\ a_0 + a_1(x_n-x_0) + \cdots + a_n(x_n-x_0)\cdot\cdots\cdot(x_n-x_{n-1}) &= y_n. \end{aligned}$$

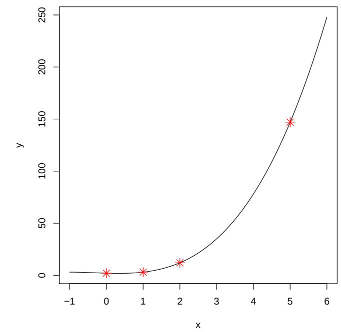
Řešení lze popsat rekurzivním způsobem pomocí poměrných diferencí prvního, druhého, … n-tého řádu – výpočet pomocí tabulky poměrných diferencí si ukážeme na cvičení.

Příklad 1. Pro zadané hodnoty sestrojte

a) Lagrangeův interpolační polynom,

b) Newtonův interpolační polynom.

i	0	1	2	3
x_i	0	1	2	5
y_i	2	3	12	147



Řešení.

a) Lagrangeův interpolační polynom:

$$L_0(x) = \frac{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-5)}{(0-1)\cdot(0-2)\cdot(0-5)} = \qquad = -\frac{1}{10}(x^3 - 8x^2 + 17x - 10)$$

$$L_1(x) = \qquad = \frac{1}{4}(x^3 - 7x^2 + 10x)$$

$$L_2(x) = \qquad = -\frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 5x)$$

$$L_3(x) = \qquad = \frac{1}{60}(x^3 - 3x^2 + 2x)$$

Langrangeův interpolační polynom:

$$L(x) = \sum_{i=0}^{3} y_i \cdot L_i(x) = \dots$$

$$\dots = x^3 + x^2 - x + 2$$

b) Newtonův interpolační polynom:

Tabulka poměrných diferencí

i	x_i	y_i	$y(x_i, x_{i+1})$	$y(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$y(x_0, x_1, x_2, x_3)$
0	0	2			
1	1	3			
2	2	12			
3	5	147			

Newtonův interpolační polynom:

$$N(x) =$$

$$\dots = x^3 + x^2 - x + 2$$

Příklad 2. Náhrada funkce e^x.
Nalezněte interpolační polynom (v Lagrangeově i Newtonově tvaru), který aproximuje funkci e^x a prochází body o hodnotách

a) $x_0 = 0,\ x_1 = 1;$

b) $x_0 = 0,\ x_1 = 0.5,\ x_2 = 1;$

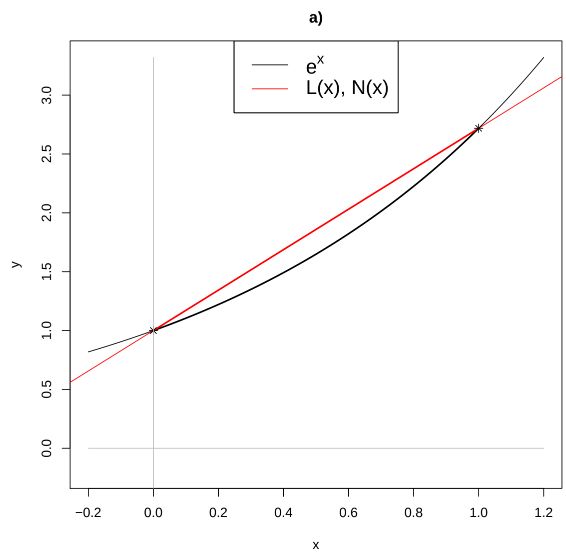
c) $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2;$

d) $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = \frac{2}{3},\ x_3 = 1.$

Řešení.

a) $x_0 = 0,\ x_1 = 1$

i	0	1
x_i	0	1
y_i	1	e



- $\boxed{\textbf{Lagrangeův interpolační polynom}}$:

Fundamentální polynomy:

$$L_0(x) = \frac{x-1}{0-1} = -(x-1) = 1-x$$
$$L_1(x) = \frac{x-0}{1-0} = x$$

Lagrangeův interpolační polynom:

$$L(x) = \sum_{i=0}^{1} y_i \cdot L_i(x) = 1\cdot(1-x) + \mathrm{e}\cdot x = 1 + x\,(\mathrm{e}-1) \doteq 1 + 1.7182\,x$$

- $\boxed{\textbf{Newtonův interpolační polynom}}$:

Tabulka poměrných diferencí

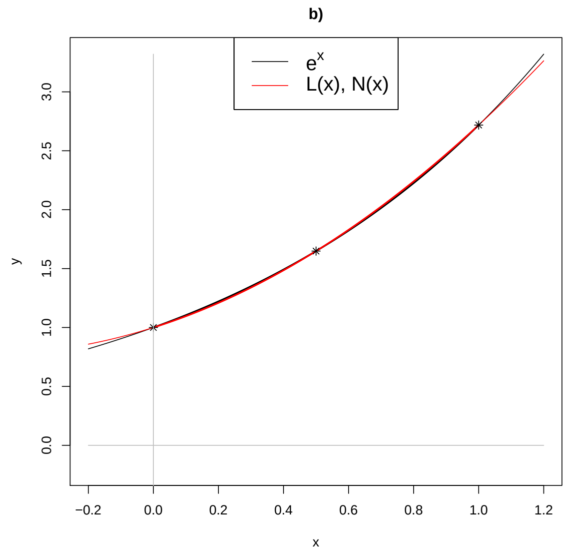
x_i	y_i	$y(x_i, x_{i+1})$
0	1	$\frac{\mathrm{e}-1}{1} = \mathrm{e}-1$
1	e	

Newtonův interpolační polynom:

$$N(x) = 1 + (\mathrm{e}-1)\,x \doteq 1 + 1.7182\,x$$

b) $x_0 = 0,\ x_1 = 0.5,\ x_2 = 1$

i	0	1	2
x_i	0	0.5	1
y_i	1	1.6487	2.7182



- **Lagrangeův interpolační polynom**:

Fundamentální polynomy:

$$L_0(x) = \frac{(x-0.5)\cdot(x-1)}{(0-0.5)\cdot(0-1)} = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot(x-1)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)\cdot(x-1)}{(0.5-0)\cdot(0.5-1)} = -4\,x\,(x-1)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(1-0)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)} = 2\,x\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

Lagrangeův interpolační polynom:

$$L(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i \cdot L_i(x) = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot(x-1) - 1.6487\cdot 4\,x\,(x-1) + 2.7182\cdot 2\,x\left(x-\frac{1}{2}\right) = 1 + 0.8766\,x + 0.8416\,x^2$$

- **Newtonův interpolační polynom**:

Tabulka poměrných diferencí

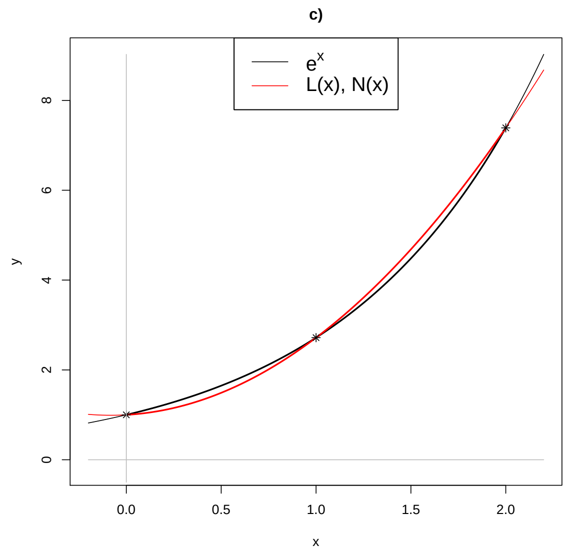
x_i	y_i	$y(x_i, x_{i+1})$	$y(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$
0	1		
		$\frac{1.6487-1}{0.5-0} = 1.2974$	
0.5	1.6487		$\frac{2.1392-1.2974}{1-0} = 0.8418$
		$\frac{2.7182-1.6487}{1-0.5} = 2.1392$	
1	2.7182		

Newtonův interpolační polynom:

$$N(x) = 1 + 1.2974\,x + 0.8418\,x\left(x-\frac{1}{2}\right) = 1 + 0.8765\,x + 0.8418\,x^2$$

c) $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2$

i	0	1	2
x_i	0	1	2
y_i	1	2.7182	7.3891



- **Lagrangeův interpolační polynom**:

Fundamentální polynomy:

$$L_0(x) = \frac{(x-1)\cdot(x-2)}{(0-1)\cdot(0-2)} = \frac{1}{2}\,(x-1)\,(x-2)$$
$$L_1(x) = \frac{(x-0)\cdot(x-2)}{(1-0)\cdot(1-2)} = -x(x-2)$$
$$L_2(x) = \frac{(x-0)\cdot(x-1)}{(2-0)\cdot(2-1)} = \frac{1}{2}x\,(x-1)$$

Lagrangeův interpolační polynom:

$$L(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i \cdot L_i(x) = \frac{1}{2}\,(x-1)\,(x-2) - 2.7182\,x(x-2) + 7.3891\cdot\frac{1}{2}\,x\,(x-1) = 1 + 0.2419\,x + 1.4764\,x^2$$

- **Newtonův interpolační polynom**:

Tabulka poměrných diferencí

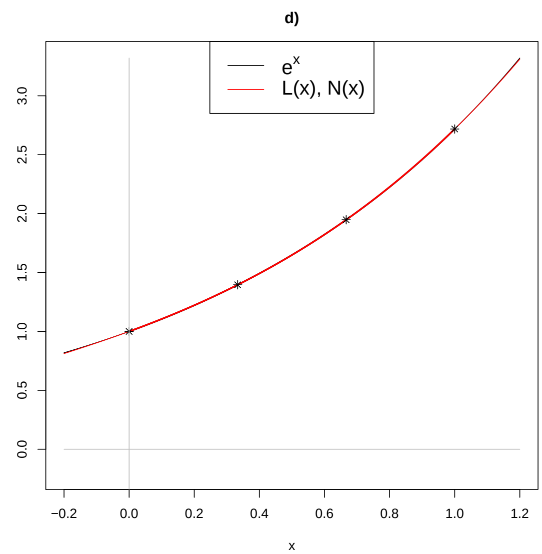
x_i	y_i	$y(x_i, x_{i+1})$	$y(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$
0	1		
		$\frac{2.7182-1}{1-0} = 1.7182$	
1	2.7182		$\frac{4.6709-1.7182}{2-0} = 1.4764$
		$\frac{7.3891-2.7182}{2-1} = 4.6709$	
2	7.3891		

Newtonův interpolační polynom:

$$N(x) = 1 + 1.7182\,x + 1.4764\,x\,(x-1) = 1 + 0.2419\,x + 1.4764\,x^2$$

d) $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = 1$

i	0	1	2	3
x_i	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
y_i	1	1.3956	1.9477	2.7182



- $\boxed{\textbf{Lagrangeův interpolační polynom}}$:

Fundamentální polynomy:

$$L_0(x) = \frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)\cdot(x-1)}{\left(0-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(0-\frac{2}{3}\right)\cdot(0-1)} = \ldots = -\frac{2}{9}\left(x^3 - 2\,x^2 + \frac{11}{9}\,x - \frac{2}{9}\right)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)\cdot(x-1)}{\left(\frac{1}{3}-0\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)} = \ldots = \frac{2}{27}\left(x^3 - \frac{5}{3}x^2 + \frac{2}{3}x\right)$$

$$L_2(x) = \frac{x\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)}{\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}-1\right)} = \ldots = -\frac{2}{27}\left(x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{3}x\right)$$

$$L_3(x) = \frac{x\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)}{1\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{2}{3}\right)} = \ldots = \frac{2}{9}\left(x^3 - x^2 + \frac{2}{9}x\right)$$

Lagrangeův interpolační polynom:

$$\begin{aligned}
L(x) &= \sum_{i=0}^{3} y_i \cdot L_i(x) \\
&= -\frac{2}{9}\left(x^3 - 2\,x^2 + \frac{11}{9}\,x - \frac{2}{9}\right) + 1.3956\cdot\frac{2}{27}\left(x^3 - \frac{5}{3}x^2 + \frac{2}{3}x\right) - 1.9477\cdot\frac{2}{27}\left(x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{3}x\right) \\
&\quad + 2.7182\cdot\frac{2}{9}\left(x^3 - x^2 + \frac{2}{9}x\right) \\
&= \ldots = 0.2786\,x^3 + 0.4257\,x^2 + 1.0140\,x + 1
\end{aligned}$$

- $\boxed{\textbf{Newtonův interpolační polynom}}$:

Tabulka poměrných diferencí

x_i	y_i	$y(x_i, x_{i+1})$	$y(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$y(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3})$
0	1			
		$\frac{1.3956-1}{\frac{1}{3}-0} = 1.1868$		
$\frac{1}{3}$	1.3956		$\frac{1.6563-1.1868}{\frac{2}{3}-1} = 0.70425$	
		$\frac{1.9477-1.3956}{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}} = 1.6563$		$\frac{0.9828-0.70425}{1-0} = 0.27855$
$\frac{2}{3}$	1.9477		$\frac{2.3115-1.6563}{1-\frac{1}{3}} = 0.9828$	
		$\frac{2.7182-1.9477}{1-\frac{2}{3}} = 2.3115$		
1	2.7182			

Newtonův interpolační polynom:

$$N(x) = 1 + 1.1868\,x + 0.70425\,x\left(x-\frac{1}{3}\right) + 0.27855\,x\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right) = 1 + 1.0140\,x + 0.4257\,x^2 + 0.2786\,x^3$$

Řešený příklad z praxe.


Zdroj: [1]

Nákladní trajekt spojující pevninu s ostrovem má maximální kapacitu 1 000 osobních vozů, ovšem nakládka vozů blížící se maximální kapacitě je časově velmi náročná. K dispozici máme tabulku s počty aut naloženými v daném čase

čas [hod]	0.5	0.7	0.9	1.1
y	452	585	689	768

Odhadněte, kolik vozů bylo naloženo za 1 hodinu, použitím

a) Lagrangeova interpolačního polynomu,

b) Newtonova interpolačního polynomu.

Řešení.

a) $\boxed{\textbf{Lagrangeův interpolační polynom}:}$

Fundamentální polynomy:

$$L_0(x) = \frac{(x-0.7)\cdot(x-0.9)\cdot(x-1.1)}{(0.5-0.7)\cdot(0.5-0.9)\cdot(0.5-1.1)} = -\frac{1}{0.048}(x-0.7)\cdot(x-0.9)\cdot(x-1.1)$$
$$L_1(x) = \frac{(x-0.5)\cdot(x-0.9)\cdot(x-1.1)}{(0.7-0.5)\cdot(0.7-0.9)\cdot(0.7-1.1)} = \frac{1}{0.016}(x-0.5)\cdot(x-0.9)\cdot(x-1.1)$$
$$L_2(x) = \frac{(x-0.5)\cdot(x-0.7)\cdot(x-1.1)}{(0.9-0.5)\cdot(0.9-0.7)\cdot(0.9-1.1)} = -\frac{1}{0.016}(x-0.5)\cdot(x-0.7)\cdot(x-1.1)$$
$$L_3(x) = \frac{(x-0.5)\cdot(x-0.7)\cdot(x-0.9)}{(1.1-0.5)\cdot(1.1-0.7)\cdot(1.1-0.9)} = \frac{1}{0.048}(x-0.5)\cdot(x-0.7)\cdot(x-0.9)$$

Lagrangeův interpolační polynom:

$$\begin{aligned}
L(x) &= \sum_{i=0}^{2} y_i \cdot L_i(x) = -\frac{452}{0.048}(x-0.7)\cdot(x-0.9)\cdot(x-1.1) + \frac{585}{0.016}(x-0.5)\cdot(x-0.9)\cdot(x-1.1) \\
&\quad - \frac{689}{0.016}(x-0.5)\cdot(x-0.7)\cdot(x-1.1) + \frac{768}{0.048}(x-0.5)\cdot(x-0.7)\cdot(x-0.9) \\
&= \frac{250}{3}x^3 - \frac{1075}{2}x^2 + \frac{7315}{6}x - \frac{269}{8} \\
L(1) &= \frac{250}{3} - \frac{1075}{2} + \frac{7315}{6} - \frac{269}{8} = 731.375
\end{aligned}$$

b) $\boxed{\textbf{Newtonův interpolační polynom}:}$

Tabulka poměrných diferencí:

i	x_i	y_i	$y(x_i, x_{i+1})$	$y(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$y(x_0, x_1, x_2, x_3)$
0	0.5	452			
			665		
				$-\frac{725}{2}$	
1	0.7	585			$\frac{250}{3}$
			520		
				$-\frac{625}{2}$	
2	0.9	689			
			395		
3	1.1	768			

Newtonův interpolační polynom:

$$\begin{aligned}
N(x) &= 452 + 665\cdot(x-0.5) - \frac{725}{2}\cdot(x-0.5)\,(x-0.7) + \frac{250}{3}\cdot(x-0.5)\,(x-0.7)\,(x-0.9) = \dots \\
&= \frac{250}{3}\,x^3 - \frac{1075}{2}\,x^2 + \frac{7315}{6}\,x - \frac{269}{8} \\
N(1) &= \frac{5851}{8} = 731.375
\end{aligned}$$

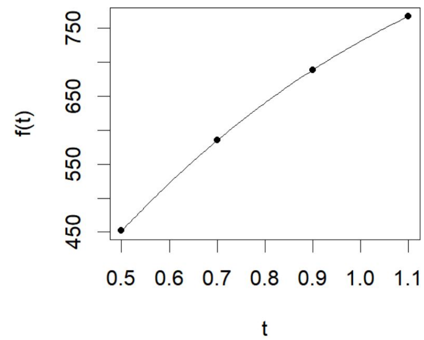
Poznámka k výsledkům.

Pokud víte, že lze počet naložených vozů v čase t vyjádřit vztahem

$$f(t) = 1\,000 \cdot \frac{t}{t + \mathrm{e}^{-t}},$$

porovnejte odhadnuté počty naložených aut za 1 hodinu se skutečnou hodnotou:

$$N(1) = 731.3750$$
$$H(1) = 731.2865$$
$$f(1) = 731.0586.$$



Pozn. Zajímají nás odhady počtů naložených aut $\Rightarrow$ po zaokrouhlení se odhady neliší od hodnoty spočítané ze zadané funkce. Počet naložených aut během 1 hodiny je tedy 731.