ITERAČNÍ METODY ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH ROVNIC

- řešení nelineární rovnice $f(x) = 0$,
- separace kořenů = hledání intervalu $\langle a, b\rangle$, ve kterém se nachází právě jeden kořen,
- předpoklady: f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ + musí být splněna podmínka $f(a) \cdot f(b) < 0$

METODA BISEKCE (METODA PŮLENÍ INTERVALU)

- v každém kroku konstrukce intervalu $\langle a_0, b_0\rangle \supset \langle a_1, b_1\rangle \supset \cdots \supset \langle a_n, b_n\rangle$,
- střed intervalu:

$$s_i = \frac{1}{2}\left(a_i + b_i\right), \, i = 0, 1, \ldots, n$$

- odhad chyby:

$$d_i = \frac{1}{2}\left(b_i - a_i\right), \, i = 0, 1, \ldots, n$$

- odhad počtu kroků:

$$\frac{b_0 - a_0}{2^{i+1}} < \varepsilon$$

- $f(a_i) \cdot f(s_i) < 0 \longrightarrow a_{i+1} = a_i,\, b_{i+1} = s_i$
  $f(s_i) \cdot f(b_i) < 0 \longrightarrow a_{i+1} = s_i,\, b_{i+1} = b_i$
- STOP podmínky: $d_i < \varepsilon$

METODA REGULA FALSI

- konstrukce:

$$x_i = a_{i-1} - f(a_{i-1})\frac{b_{i-1} - a_{i-1}}{f(b_{i-1}) - f(a_{i-1})}, \, i = 1, 2, \ldots$$

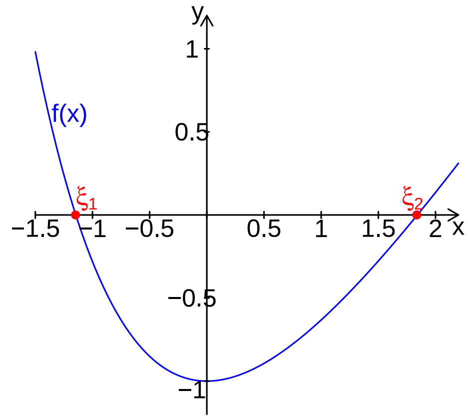
- geometrická interpretace: bod x_i je průsečík sečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodech $[a_{i-1}, f(a_{i-1})]$, $[b_{i-1}, f(b_{i-1})]$ s osou x
- STOP podmínky: $|f(x_i)| < \varepsilon$

Příklad 1. Najděte všechna řešení rovnice $x + \mathrm{e}^{-x} - 2 = 0$ s přesností 0.01

a) metodou bisekce,

b) Newtonovou metodou,

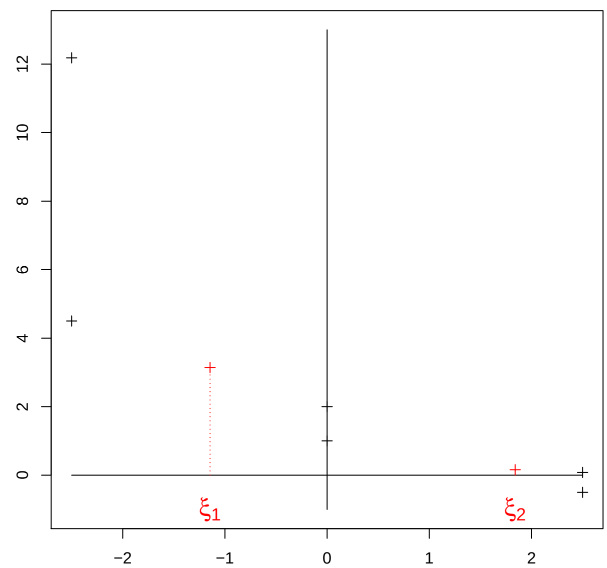
c) metodou prosté iterace.



Řešení.

• hrubý odhad intervalu, určení počátečních aproximací:

$$x + \mathrm{e}^{-x} - 2 = 0$$



$f(x) = x + \mathrm{e}^{-x} - 2$

• interval pro odhad záporného řešení:

$$\xi_1 \in \langle -2, -1 \rangle$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-2) = \\ f(-1) = \end{array}\right\} \quad f(-2) \cdot f(-1) < 0$$

• interval pro odhad kladného řešení:

$$\xi_2 \in \langle 0, 2 \rangle$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = \\ f(2) = \end{array}\right\} \quad f(0) \cdot f(2) < 0$$

a) **metoda bisekce**:

$$s_i = \frac{1}{2}(a_i + b_i)$$
$$d_i = \frac{1}{2}(b_i - a_i)$$
STOP kritérium: $d_i < \varepsilon$

• odhad **záporného** řešení:

odhad počtu kroků:

$$\frac{b_0 - a_0}{2^{i+1}} < \varepsilon$$

tabulka hodnot:

i	a_i	b_i	s_i	d_i	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f(s_i)$
0							
1							
2							
3							
4	-1.1875	-1.125	-1.1563	0.0313	0.0914	-0.0448	0.0217
5	-1.1563	-1.125	-1.1406	0.0156	0.0217	-0.0448	-0.0119
6	-1.1563	-1.1406	-1.1484	0.0078 < 0.01	0.0217	-0.0119	0.0048

odhad **záporného** řešení:

$$\hat{x}_1 = -1.1484 \pm 0.0078$$

• odhad **kladného** řešení:

odhad počtu kroků:

$$\frac{b_0 - a_0}{2^{i+1}} < \varepsilon$$
$$\frac{2}{2^{i+1}} < 0.01$$
$$\frac{2}{0.01} < 2^{i+1}$$
$$200 < 2^{i+1}$$
$$\log_2 200 < i + 1$$
$$i > 7.6439 - 1$$
$$i = 7$$

tabulka hodnot:

i	a_i	b_i	s_i	d_i	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f(s_i)$
0	0	2	1	1	-1	0.1353	-0.6321
1	1	2	1.5	0.5	-0.6321	0.1353	-0.2769
2	1.5	2	1.75	0.25	-0.2769	0.1353	-0.0762
3	1.75	2	1.875	0.125	-0.0762	0.1353	0.0284
4	1.75	1.875	1.8125	0.0625	-0.0762	0.0284	-0.0243
5	1.8125	1.875	1.8438	0.0313	-0.0243	0.0284	0.0020
6	1.8125	1.8438	1.8281	0.0156	-0.0243	0.0020	-0.0112
7	1.8281	1.8438	1.8359	$0.0078 < 0.01$	-0.0112	0.0020	-0.0046

odhad **záporného** řešení:

$$\hat{x}_2 = 1.8359 \pm 0.0078$$

b) $\boxed{\textbf{metoda regula falsi:}}$

$$x_i = a_{i-1} - f(a_{i-1})\frac{b_{i-1} - a_{i-1}}{f(b_{i-1}) - f(a_{i-1})}, \text{ i=1,2,}\ldots$$
$$\text{STOP kritérium: } |f(x_i)| < \varepsilon$$

• odhad **záporného** řešení:

i	a_{i-1}	b_{i-1}	x_i	$f(a_{i-1})$	$f(b_{i-1})$	$f(x_i)$
1						
2						
3						
4	-2	-1.1312	-1.1393	3.3891	-0.0318	-0.0148
5	-2	-1.1393	-1.1430	3.3891	-0.0148	$\|-0.0068\| < 0.01$

odhad **záporného** řešení:

$$\hat{x}_2 = -1.1430 \pm 0.0068$$

• odhad **kladného** řešení:

i	a_{i-1}	b_{i-1}	x_i	$f(a_{i-1})$	$f(b_{i-1})$	$f(x_i)$
1	0	2	1.7616	-1	0.1353	-0.0666
2	1.7616	2	1.8403	-0.0666	0.1353	$\|-0.001\| < \varepsilon$

odhad **kladného** řešení:

$$\hat{x}_2 = 1.8403 \pm 0.001$$

Řešený příklad z praxe.

Parašutista padá z klidového stavu. Jeho rychlost v je dána v závislosti na čase rovnicí

$$v(t) = \frac{gm}{c}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t}\right),$$

kde $g = 9.8$ m·s^{-2} a $c = 13$ kg·s^{-1}. Předpokládejme, že parašutista váží $m = 95$ kg. Odhadněte dobu, po které parašutista dosáhne rychlosti 35 m·s^{-1}

a) analyticky,

b) metodou bisekce (s přesností $\varepsilon < 10^{-3}$),

c) metodou regula falsi (s přesností $\varepsilon < 10^{-3}$).

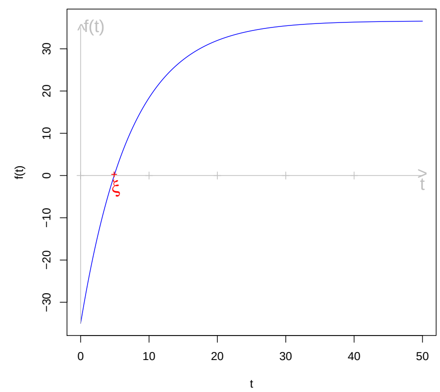
Zdroj: [1]

Řešení.

a) $\boxed{\textbf{analytické řešení}}$:

Řešíme nelineární rovnici $f(t) = 0$, kde $f(t) = \frac{gm}{c}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t}\right) - v$:

$$\begin{aligned}
v &= \frac{gm}{c}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t}\right)\\
\frac{cv}{gm} &= 1 - \mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t}\\
\mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t} &= 1 - \frac{cv}{gm}\\
-\frac{c}{m}t &= \ln\left(1 - \frac{cv}{gm}\right)\\
t &= -\frac{m}{c}\ln\left(1 - \frac{cv}{gm}\right)\\
t &\doteq 4.9023 \text{ s (přesné řešení)}
\end{aligned}$$



b) $\boxed{\textbf{metoda bisekce:}}$ např. $I = \langle 0, 100\rangle$, $f(0) = -35$, $f(100) \doteq 36.6153$

i	a_i	b_i	s_i	d_i	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f(s_i)$
0	0	100.0000	50.0000	50.0000	-35.0000	36.6153	36.5389
1	0	50.0000	25.0000	25.0000	-35.0000	36.5389	34.2751
2	0	25.0000	12.5000	12.5000	-35.0000	34.2751	23.6694
3	0	12.5000	6.2500	6.2500	-35.0000	23.6694	6.1666
4	0	6.2500	3.1250	3.1250	-35.0000	6.1666	-10.0815
5	3.1250	6.2500	4.6875	1.5625	-10.0815	6.1666	-1.0922
6	4.6875	6.2500	5.4688	0.7813	-1.0922	6.1666	2.7310
7	4.6875	5.4688	5.0781	0.3906	-1.0922	2.7310	0.8704
8	4.6875	5.0781	4.8828	0.1953	-1.0922	0.8704	-0.0978
9	4.8828	5.0781	4.9805	0.0977	-0.0978	0.8704	0.3896
10	4.8828	4.9805	4.9316	0.0488	-0.0978	0.3896	0.1467
11	4.8828	4.9316	4.9072	0.0244	-0.0978	0.1467	0.0247
12	4.8828	4.9072	4.8950	0.0122	-0.0978	0.0247	-0.0365
13	4.8950	4.9072	4.9011	0.0061	-0.0365	0.0247	-0.0059
14	4.9011	4.9072	4.9042	0.0031	-0.0059	0.0247	0.0094
15	4.9011	4.9042	4.9026	0.0015	-0.0059	0.0094	0.0017
16	4.9011	4.9026	4.9019	$0.0008 < \varepsilon$	-0.0059	0.0017	-0.0021

odhad řešení:

$$\hat{x} = 4.9019 \pm 0.0008$$

c) $\boxed{\textbf{metoda regula falsi:}}$ např. $I = \langle 0, 100 \rangle$, $f(0) = -35$, $f(100) \doteq 36.6153$

i	a_{i-1}	b_{i-1}	x_i	$f(a_{i-1})$	$f(b_{i-1})$	$f(x_i)$
1	0	100.0000	48.8722	-35.0000	36.6153	36.5261
2	0	48.8722	23.9147	-35.0000	36.5261	33.9004
3	0	23.9147	12.1482	-35.0000	33.9004	23.0309
4	0	12.1482	7.3269	-35.0000	23.0309	10.3387
5	0	7.3269	5.6561	-35.0000	10.3387	3.5888
6	0	5.6561	5.1301	-35.0000	3.5888	1.1238
7	0	5.1301	4.9705	-35.0000	1.1238	0.3402
8	0	4.9705	4.9227	-35.0000	0.3402	0.1019
9	0	4.9227	4.9084	-35.0000	0.1019	0.0304
10	0	4.9084	4.9041	-35.0000	0.0304	0.0091
11	0	4.9041	4.9028	-35.0000	0.0091	0.0027
12	0	4.9028	4.9025	-35.0000	0.0027	$0.0008 < \varepsilon$

odhad řešení:

$$\hat{x} = 4.9025 \pm 0.0008$$

Zdroj:
[1] http://www.shapesticker.eu/Samolepka-Parasutista-d49.htm?tab=description (září 2017)