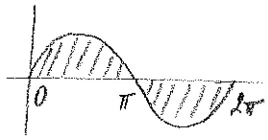
- plocha podgrafu kladné fce na [a,b]: $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx}$
- plocha mezi grafem fce f a osou x na [a,b]: $\boxed{\int_a^b |f(x)|\,dx}$
- objem rotačního tělesa (rotace nezáporné fce kolem osy x na [a,b]): $\boxed{\pi\int_a^b f^2(x)\,dx}$

① Urči obsah plochy určenou osou x a grafem funkce sin x

a) na intervalu $[0,\pi]$

b) na intervalu $[0,2\pi]$

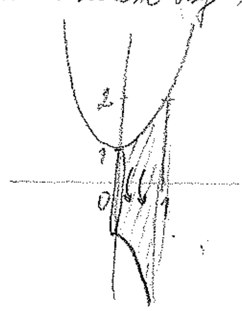


Řešení:

a) $S=\int_0^\pi \sin x\,dx=-[\cos x]_0^\pi=-(\cos\pi-\cos 0)=-(-1-1)=\underline{2}$

b) $S=\int_0^\pi \sin x\,dx-\int_\pi^{2\pi}\sin x\,dx=2-\left(-[\cos x]_\pi^{2\pi}\right)=2-\left[-(\underbrace{\cos 2\pi}_{1}-\underbrace{\cos\pi}_{-1})\right]=2+2=\underline{4}$

② Urči objem tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené čarou $y=x^2+1$ kolem osy x na intervalu [0,1].



Řešení: $V=\pi\int_0^1 (x^2+1)^2\,dx=\pi\int_0^1 (x^4+2x^2+1)\,dx=$

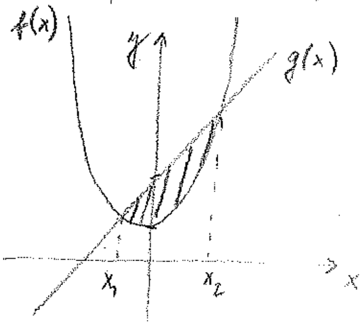
$=\pi\left[\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3+x\right]_0^1=\pi\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1-0\right)=\underline{\underline{\frac{28}{15}\pi}}$

③ Jsou dány funkce $f(x)=x^2+1$, $g(x)=2x+4$.

a) Vypočítejte obsah plochy ohraničené grafy fcí f(x) a g(x).

b) Urči objem tělesa, které vznikne rotací plochy těmito funkcemi omezené kolem osy x.

c) Přímka g(x) vytíná z paraboly f(x) ohraničený kus. Jaký je objem tělesa, které vznikne rotací tohoto kusu paraboly f(x) kolem osy x?



Řešení: a) určení průsečíků:

$f(x)=g(x)$

$x^2+1=2x+4 \longrightarrow x^2-2x-3=0 \longrightarrow (x-3)(x+1)=0$

$x_1=-1,\ x_2=3$

$S=\int_{-1}^3 (g(x)-f(x))\,dx=\int_{-1}^3 (2x+4-x^2-1)\,dx=\int_{-1}^3 (3+2x-x^2)\,dx=$

$=\left[3x+x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^3=\ldots=\underline{\underline{\frac{32}{3}}}$

b) $V=\pi\int_{-1}^3 g^2(x)\,dx-\pi\int_{-1}^3 f^2(x)\,dx=\pi\int_{-1}^3 (2x+4)^2\,dx-\pi\int_{-1}^3 (x^2+1)\,dx=\pi\int_{-1}^3 (4x^2+16x+16)\,dx-\pi\int_{-1}^3 (x^4+2x^2+1)\,dx=$

$=\ldots=\underline{\underline{\frac{1408}{15}\pi}}$

c) $V=\pi\int_{-1}^3 f^2(x)\,dx=\pi\int_{-1}^3 (x^2+1)^2\,dx=\pi\int_{-1}^3 (x^4+2x^2+1)\,dx=\ldots=\underline{\underline{\frac{1072}{15}\pi}}$