ŘEŠENÍ ALGEBRAICKÝCH ROVNIC

① Určete počet kořenů dané rovnice, odhadněte počet kladných a záporných reálných kořenů. Dále najděte intervaly, ve kterých leží reálné kořeny (metoda separace – stačí intervaly délky 2). Nakonec s maximální chybou 0.1 aproximujte reálné kořeny.

$$P(x) = x^3 - 5x^2 + 2.$$

Řešení:

- ohraničení kořenů
  - $A = \max\{|-5|, |2|\} = 5 \Rightarrow$ všechny reálné kořeny se nachází v intervalu $(-6, 6)$
  - počet kladných $\mathbb{R}$ kořenů: $1 \quad -5 \quad 2$ … 2 znaménkové změny → 2 nebo 0 kl. $\mathbb{R}$ kořenů
  - počet záporných $\mathbb{R}$ kořenů: $P(-x) = -x^3 - 5x^2 + 2$ $\quad -1 \quad -5 \quad 2$ … 1 znam. změna → 1 záp. $\mathbb{R}$ kořen
  - $st(P) = 3$ … stupeň polynomu $= 3 \Rightarrow$
    1. 2 kladné, 1 záporný
    2. 0 kladných, 1 záporný, 2 komplexně sdružené
- separace kořenů

	1	−5	0	2	
−6	1	−11	66	−394	
−4	1	−9	36	−142	
$\boxed{-2}$	1	−7	14	−26	znam. změna
$\boxed{0}$	1	−5	0	2	znam. změna
$\boxed{2}$	1	−3	−6	−10	
$\boxed{4}$	1	−1	−4	−14	znaménková změna
$\boxed{6}$	1	1	6	38	

⇒ $P(x)$ má 3 $\mathbb{R}$ kořeny
- záp. kořen $\in [-2, 0]$
- 2 kl. kořeny $\in [0, 2]$, $\in [4, 6]$

- metoda půlení

k	a_k	b_k	s_k	$P(a_k)$	$P(b_k)$	$P(s_k)$	$e_k = \frac{b_k - a_k}{2}$	
0	−2	0	−1	−	+	−	1	
1	−1	0	−0.5	−	+	+	0.5	
2	−1	−0.5	−0.75	−	+	−	0.25	
3	−0.75	−0.5	−0.625	−	+	−	0.1250	
4	−0.625	−0.5	$\boxed{-0.5625}$	−	+	+	0.0625 < 0.1	STOP
0	0	2	1	+	−	−	1	
1	0	1	0.5	+	−	+	0.5	
2	0.5	1	0.75	+	−	−	0.25	
3	0.5	0.75	0.625	+	−	+	0.125	
4	0.625	0.75	$\boxed{0.6875}$	+	−	−	0.0625 < 0.1	STOP
0	4	6	5	−	+	+	1	
1	4	5	4.5	−	+	−	0.5	
2	4.5	5	4.75	−	+	−	0.25	
3	4.75	5	4.875	−	+	−	0.125	
4	4.875	5	$\boxed{4.9375}$	−	+	+	0.0625 < 0.1	STOP

② Odhadněte počet kladných a záporných reálných kořenů.
Metodou separace určete intervaly, ve kterých leží reálné kořeny (stačí intervaly délky 2)
Tyto kořeny zpřesněte metodou půlení s maximální chybou 0.1.

$$P(x) = 2x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 2x + 4$$

Řešení:

! Musíme dostat normovaný polynom, tj. polynom, jehož koeficient u členu s nejvyšší mocninou, je roven 1. ⇒ polynom vydělíme 2, dostáváme nový polynom: $P(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + x + 2$

• ohraničení kořenů:

· $A = \max\{|2|, |-1|, |1|, |2|\} = 2$

· reálné kořeny leží v intervalu $(-3, 3)$

· počet kl. $\mathbb{R}$ kořenů: $1 \quad 2 \quad -1 \quad 1 \quad 2$ 2 znam. změny ⇒ 2 nebo 0 kl. $\mathbb{R}$ kořenů

· počet záp. $\mathbb{R}$ kořenů: $P(-x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - x + 2$ $1 \quad -2 \quad -1 \quad -1 \quad 2$ ⇒ 2 znaménkové změny ⇒ 2 nebo 0 záp. $\mathbb{R}$ kořenů

· možnosti (4 kořeny): 1. 2 kladné, 2 záporné
2. 2 kladné, 0 záporných, 2 kompl. sdružené
3. 0 kladných, 2 záporné, 2 kompl. sdružené
4. 0 kladných, 0 záporných, 4 kompl. sdružené

• separace kořenů:

x	$P(x)$	
-3	17	znam. změna
-1	-1	znam. změna
1	5	
3	131	

⇒ kořeny leží v intervalech $(-3, -1)$, $(-1, 1)$

• metoda půlení

k	a_k	b_k	s_k	$sgn(P(a_k))$	$sgn(P(b_k))$	$sgn(P(s_k))$	$e_k = \frac{b_k - a_k}{2}$
0	-3	-1	-2	+	−	−	1
1	-3	-2	-2.5	+	−	+	0.5
2	-2.5	-2	-2.25	+	−	−	0.25
3	-2.5	-2.25	-2.375	+	−	−	0.125
4	-2.5	-2.375	$\boxed{-2.4375}$	+	−	−	$0.0625 < 0.1$ STOP
0	-1	1	0	−	+	+	1
1	-1	0	-0.5	−	+	+	0.5
2	-1	-0.5	-0.75	−	+	+	0.25
3	-1	-0.75	-0.875	−	+	−	0.125
4	-0.875	-0.75	$\boxed{-0.8125}$	−	+	−	$0.0625 < 0.1$ STOP