LAGRANGEŮV INTERPOLAČNÍ POLYNOM

① V následující tabulce jsou uvedeny 4 hodnoty funkce f. Aproximujte tuto funkci pomocí Lagrangeova interpolačního polynomu. Polynom upravte. Poté odhadněte hodnotu funkce f v bodě $\frac{1}{2}$.

x	-1	0	1	2
$f(x)$	6	-4	-2	0

Řešení:

$$l_0(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = -\frac{1}{6}x(x-1)(x-2)$$

$$l_1(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} = \frac{1}{2}(x+1)(x-1)(x-2)$$

$$l_2(x) = \frac{(x+1)x(x-2)}{(1+1)\cdot 1\cdot(1-2)} = -\frac{1}{2}(x+1)x(x-2)$$

$$l_3(x) = \frac{(x+1)x(x-1)}{(2+1)\cdot 2(2-1)} = \frac{1}{6}(x+1)x(x-1)$$

$$L_3(x) = l_0 f_0 + l_1 f_1 + l_2\cdot f_2 + l_3\cdot f_3 = -\frac{1}{6}x(x-1)(x-2)\cdot 6 + \frac{1}{2}(x+1)(x-1)(x-2)\cdot(-4) -$$

$$-\frac{1}{2}(x+1)x(x-2)\cdot(-2) + \frac{1}{6}(x+1)x(x-1)\cdot 0 =$$

$$= -x(x-1)(x-2) - 2(x+1)(x-1)(x-2) + (x+1)x(x-2) = \ldots = \underline{2(x-2)(-x^2+x+1)}$$

$$L_3\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{15}{4} = \underline{-3.75}$$

② Byly naměřeny následující hodnoty: $[1,-2]$, $[2,0]$, $[3,1]$. Pomocí Lagrangeova interpolačního polynomu odhadněte hodnotu měřené veličiny v bodě 2.5.

Řešení:

$$l_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}(x-2)(x-3)$$

$$l_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = -(x-1)(x-3)$$

$$l_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$$

$$L_2(x) = f_0 l_0 + f_1 l_1 + f_2 l_2 = -2\cdot\frac{1}{2}(x-2)(x-3) + 0\cdot(-1)(x-1)(x-3) + 1\cdot\frac{1}{2}(x-1)(x-2) =$$

$$= (x-2)\left[-(x-3) + \frac{1}{2}(x-1)\right] = (x-2)\left(-x+3+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right) = (x-2)\left(-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(x-2)(-x+5) = \frac{1}{2}(-x^2+5x+2x-10) = \frac{1}{2}(-x^2+7x-10) = \underline{-\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}x-5}$$

$$\underline{L_2(2.5) = 0.625}$$