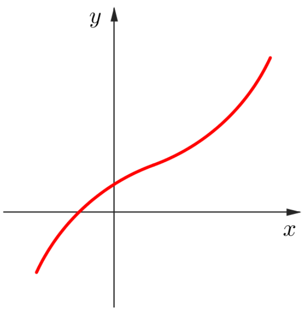
Funkce a její graf

Definice 1. Řekneme, že **funkčním předpisem $y = f(x)$ je určena reálná funkce f jedné reálné proměnné x**, jestliže

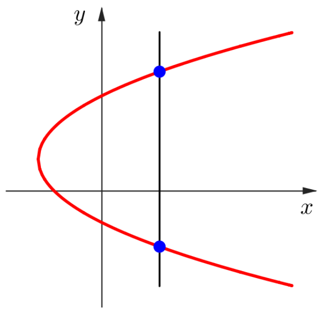
1. je dán obor $A \subset \mathbb{E}_1$ „přípustných“ reálných hodnot nezávisle proměnné x;
2. každému $x \in A$ je přiřazena **právě jedna** reálná hodnota závisle proměnné y podle funkčního předpisu $y = f(x)$.

Graf funkce

- Gr $f = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ x \in D(f),\ y = f(x)\}$
- Každá rovnoběžka s osou y protne graf funkce nejvýše v jednom bodě.



Obrázek 1: je graf funkce

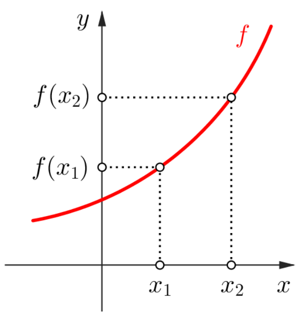


Obrázek 2: ne graf funkce

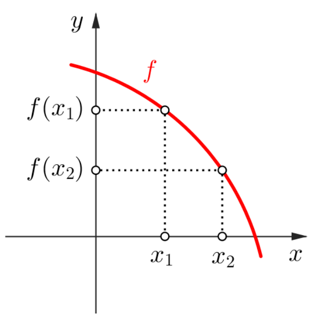
Základní vlastnosti funkcí

Funkce f je na množině $M \subseteq D(f)$

- **rostoucí** – $\forall x_1, x_2 \in M :\ \boldsymbol{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)}$
- **klesající** – $\forall x_1, x_2 \in M :\ \boldsymbol{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)}$

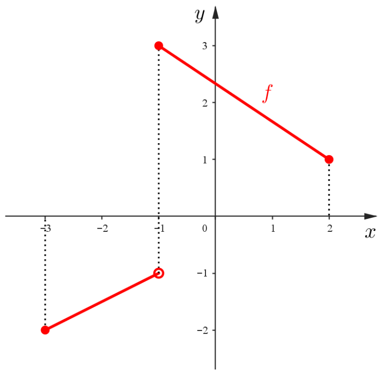


Obrázek 3: Rostoucí funkce



Obrázek 4: Klesající funkce

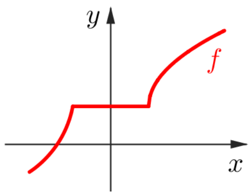
- **ryze monotónní**, je-li rostoucí nebo klesající
- **prostá** – $\forall x_1, x_2 \in M :\ \boldsymbol{x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)}$



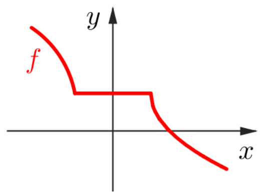
Obrázek 5: f je na $\langle -3, 2\rangle$ prostá, ale není na $\langle -3, 2\rangle$ ryze monotónní

- Kažká rovnoběžka s osou x protne graf prosté funkce nejvýše v jednom bodě.
- f je ryze monotónní $\Rightarrow$ f je prostá.
- Opak (f je prostá $\Rightarrow$ f je ryze monotónní) **neplatí.**

- **neklesající** – $\forall x_1, x_2 \in M: \ \boldsymbol{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)}$
- **nerostoucí** – $\forall x_1, x_2 \in M: \ \boldsymbol{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)}$

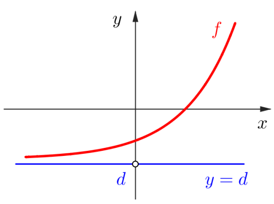


Obrázek 6: Neklesající funkce

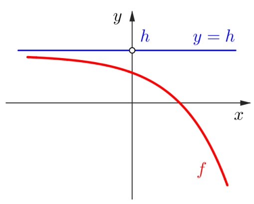


Obrázek 7: Nerostoucí funkce

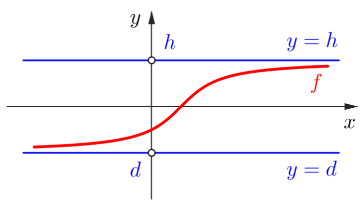
- **monotónní**, je-li neklesající nebo nerostoucí
- **zdola ohraničená** – $\exists\, d \in \mathbb{R};\ \boldsymbol{f(x) \geq d}\ \ \forall x \in M$
- **shora ohraničená** – $\exists\, h \in \mathbb{R};\ \boldsymbol{f(x) \leq h}\ \ \forall x \in M$
- **ohraničená** – $\exists\, d, h \in \mathbb{R};\ \boldsymbol{d \leq f(x) \leq h}\ \ \forall x \in M$



Obrázek 8: Zdola ohraničená funkce



Obrázek 9: Shora ohraničená funkce

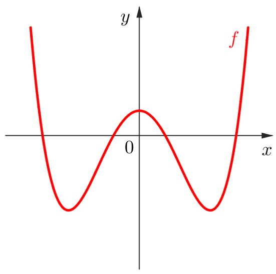


Obrázek 10: Ohraničená funkce

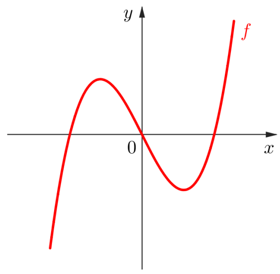
- **Sudá**

  1. $x \in M \Rightarrow -x \in M$
  2. $\boldsymbol{f(-x) = f(x)} \quad \forall x \in M$

  – graf je symetrický vzhledem k ose y



Obrázek 11: Sudá funkce



Obrázek 12: Lichá funkce

- **Lichá**

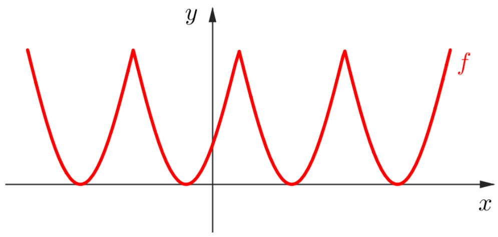
  1. $x \in M \Rightarrow -x \in M$
  2. $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)} \quad \forall x \in M$

  – graf je symetrický vzhledem k počátku

- **Periodická**
  $\exists\, p \in \mathbb{R}^+ :$

  1. $x \in M \Rightarrow x + p \in M$
  2. $\boldsymbol{f(x+p) = f(x)} \quad \forall x \in M$

  – $p \ldots$ **perioda**



Periodická funkce

Elementární funkce

Lineární funkce $\boldsymbol{y = ax + b}$

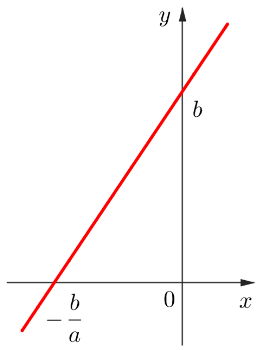
$a, b \in \mathbb{R}$
$D(f) = \mathbb{R}$
graf: přímka

$a = 0$: **Konstantní funkce** $\boldsymbol{y = b}$
$b = 0$: **Přímá úměrnost** $\boldsymbol{y = ax}$

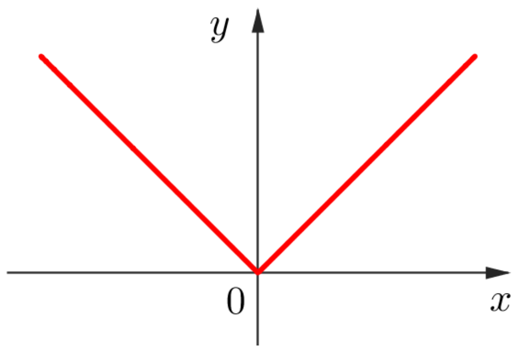
Absolutní hodnota $\boldsymbol{y = |x|}$

$D(f) = \mathbb{R}$

Poznámka: $|a| = \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0 \\ -a & \text{pro } a < 0 \end{cases}$



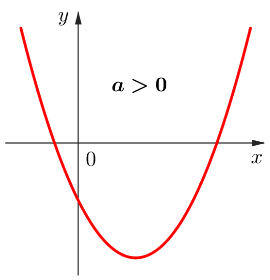
Obrázek 13: Lineární funkce

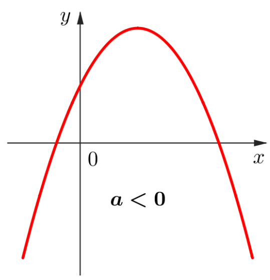


Obrázek 14: Absolutní hodnota

Kvadratická funkce $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$

- $a, b, c \in \mathbb{R}, \;\; a \neq 0$
- $D(f) = \mathbb{R}$
- graf: parabola





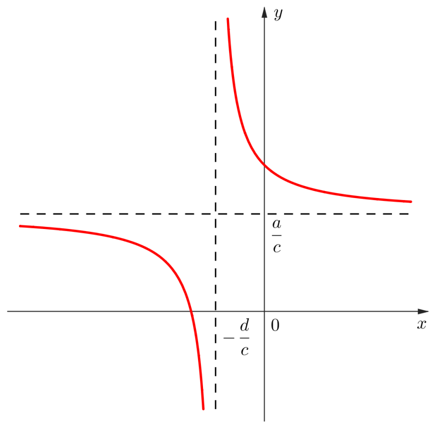
Lineární lomená funkce $\boldsymbol{y = \dfrac{ax+b}{cx+d}}$

$a, b, c, d \in \mathbb{R},\ c \neq 0,\ ad - bc \neq 0$

$D(f) = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$

graf: rovnoosá hyperbola

zvláštní případ: **Nepřímá úměrnost** $\boldsymbol{y = \dfrac{k}{x}}$, $k \in \mathbb{R} - \{0\}$

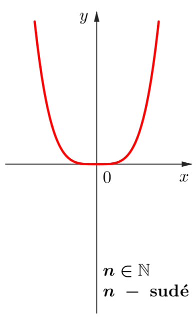


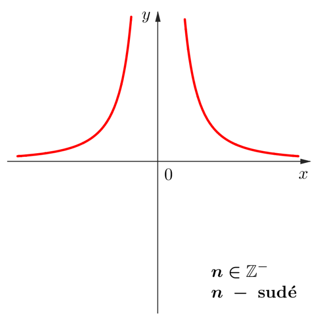
Obrázek 15: Lineární lomená funkce

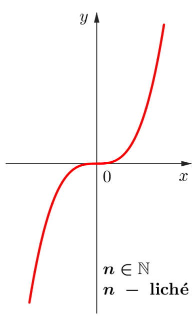
Mocninná funkce $\boldsymbol{y = x^n}$

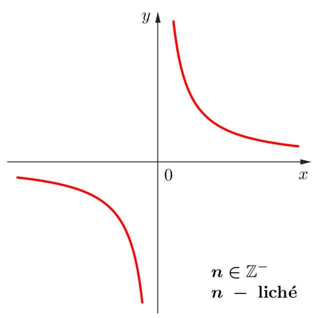
$n \in \mathbb{N}$
$D(f) = \mathbb{R}$
graf: parabola n-tého stupně

$n \in \mathbb{Z}^-$
$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
graf: hyperbola n-tého stupně







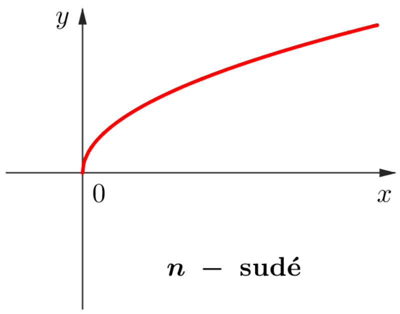


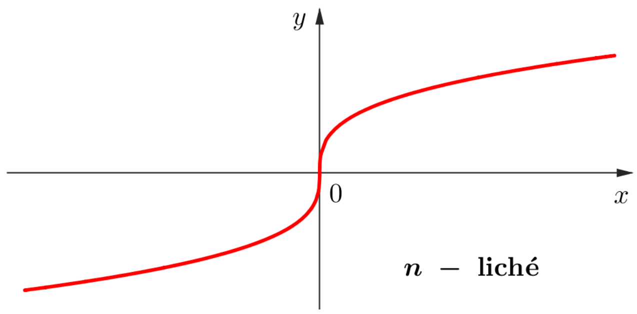
n-tá odmocnina $\quad y = \sqrt[n]{x}$

- $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$
- graf: parabola n-tého stupně

n sudé $\ldots D(f) = \mathbb{R}_0^+$

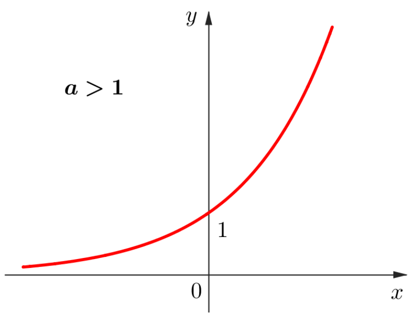
n liché $\ldots D(f) = \mathbb{R}$

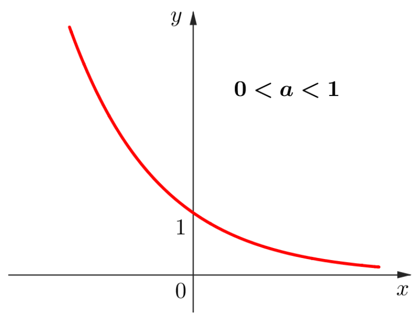




Exponenciální funkce $\quad y = a^x$

- $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$
- $D(f) = \mathbb{R},\quad H(f) = \mathbb{R}^+$





Vzorce platné $\forall x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$$\boldsymbol{a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}}$$

$$\boldsymbol{\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2}}$$

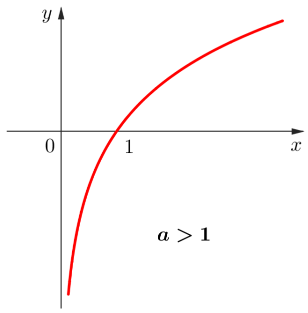
$$\boldsymbol{(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}}$$

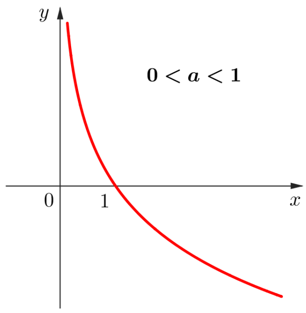
$$\boldsymbol{a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x}$$

Logaritmická funkce $\boldsymbol{y = \log_a x}$ $\qquad\ldots\quad a^y = x$

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$
$D(f) = \mathbb{R}^+, \quad H(f) = \mathbb{R}$

Přirozený logaritmus: $\boldsymbol{y = \ln x} = \log_{\mathrm{e}} x, \quad \mathrm{e} \doteq 2,71$
Dekadický logaritmus: $\boldsymbol{y = \log x} = \log_{10} x$





Vzorce platné $\forall x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$$\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

$$\log_a x^k = k \cdot \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x$$