

NUMERICKÉ DERIVACE

- Využíváme pro aproximaci derivace dané funkce f především v případech, kdy
 - derivovaná funkce je zadána pouze tabulkou,
 - výpočet přesné hodnoty derivace je příliš pracný.
- Derivovanou funkci nahradíme Newtonovým interpolačním polynomem.
- Přesnou hodnotu derivace odhadneme pomocí derivace interpolačního polynomu.
- Hodnotu derivace počítáme v uzlech x_1, x_2, \dots, x_n s krokem $h > 0$, tzn.

$$x_{i+1} = x_i + h$$

- **Dopředná diference** (pro krajní bod):

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- **Zpětná diference** (pro krajní bod):

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

- **Centrální diference** (pro vnitřní body):

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

- **Druhá centrální diference** (pro vnitřní body):

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Příklad: Je dána funkce $f(x) = 2x + e^{2x}$. Odhadněte hodnotu její první a druhé derivace v daných uzlech.

i	1	2	3
x_i	-0,5	0	0,5
y_i	-0,63212	1	3,71828

$$\Rightarrow h = 0,5$$

$$f'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h} = \frac{1 - (-0,63212)}{0,5} = \underline{\underline{3,26424}}$$

$$f'(x_2) = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{2h} = \frac{3,71828 - (-0,63212)}{1} = \underline{\underline{4,3504}}$$

$$f'(x_3) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{h} = \frac{3,71828 - 1}{0,5} = \underline{\underline{5,43656}}$$

$$f''(x_2) = \frac{f(x_3) - 2f(x_2) + f(x_1)}{h^2} = \frac{3,71828 - 2 \cdot 1 - (-0,63212)}{0,25} = \underline{\underline{4,34464}}$$

Přesné hodnoty derivace funkce v daných uzlech:

$$f'_*(x) = 2 + 2e^{2x} = 2(1 + e^{2x})$$

$$f''_*(x) = 4e^{2x}$$

$$f'_*(x_1) = 2,73576$$

$$f'_*(x_2) = 4$$

$$f'_*(x_3) = 7,43656$$

$$f''_*(x_2) = 4$$

Odhad chyby aproximace:

$$|f'(x_1) - f'_*(x_1)| = |3,26424 - 2,73576| = 0,52848$$

$$|f'(x_2) - f'_*(x_2)| = |4,3504 - 4| = 0,3504$$

$$|f'(x_3) - f'_*(x_3)| = |5,43656 - 7,43656| = 2$$

$$|f''(x_2) - f''_*(x_2)| = |4,34464 - 4| = 0,34464$$

POZNÁMKA: NEJVĚTŠÍ CHYBY V KRAJNÍCH BODECH

Příklad: Funkce $f(x)$ je dána tabulkou. Odhadněte hodnotu její první a druhé derivace v daných uzlech.

i	1	2	3	4
x_i	0,25	0,5	0,75	1
y_i	0,06	1,72	3,65	7,24

$$\Rightarrow h = 0,25$$

$$f'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h} = \frac{1,72 - 0,06}{0,25} = \underline{\underline{6,64}}$$

$$f'(x_2) = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{2h} = \frac{3,65 - 0,06}{0,5} = \underline{\underline{7,18}}$$

$$f'(x_3) = \frac{f(x_4) - f(x_2)}{2h} = \frac{7,24 - 1,72}{0,5} = \underline{\underline{11,04}}$$

$$f'(x_4) = \frac{f(x_4) - f(x_3)}{h} = \frac{7,24 - 3,65}{0,25} = \underline{\underline{14,36}}$$

$$f''(x_2) = \frac{f(x_3) - 2f(x_2) + f(x_1)}{h^2} = \frac{3,65 - 2 \cdot 1,72 + 0,06}{0,0625} = \underline{\underline{4,32}}$$

$$f''(x_3) = \frac{f(x_4) - 2f(x_3) + f(x_2)}{h^2} = \frac{7,24 - 2 \cdot 3,65 + 1,72}{0,0625} = \underline{\underline{26,56}}$$