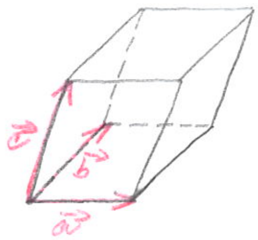
SMÍŠENÝ SOUČIN

$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

Využití:
- Objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

  $V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$



- Objem čtyřstěnu určeného vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

  $V = \frac{1}{6} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$

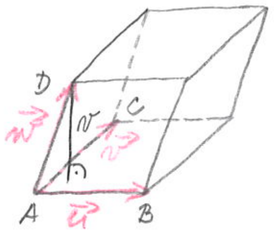
- Vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jsou komplanární $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$

V souřadnicích: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Př: Jsou dány vektory $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1, 1, 2)$
$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (3, 2, -1)$
$\vec{w} = \overrightarrow{AD} = (1, -3, -1)$

a) Ověřte, že vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ nejsou komplanární!
b) Vypočtete objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.
c) Určete délku výšky jdoucí bodem D.



a) $$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & -4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -7 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 28 = -25 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ nejsou komplanární

b) $V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = |-25| = \underline{\underline{25}}$

c) $V = P \cdot v$
$\hookrightarrow$ obsah stěny nad vektory $\vec{u}, \vec{v}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(-1-4) - \vec{j}(-1-6) + \vec{k}(2-3) = -5\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k} = (-5, 7, -1)$$

$$P = \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{25+49+1} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

$$v = \frac{V}{P} = \frac{25}{5\sqrt{3}} = \underline{\underline{\frac{5}{\sqrt{3}}}}$$