ASYMPTOTY GRAFU FUNKCE

- Jak vypadá graf funkce v okolí bodů, ve kterých funkce není definovaná?
- Jak vypadá graf funkce v $\pm\infty$?

Svislé asymptoty: $x = x_0$

- $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \notin D(f)$
- existují, jestliže f má v bodě x_0 alespoň jednu jednostrannou limitu

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x), \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

nevlastní! (tj. rovnu $\pm\infty$)

Př: Určete svislé asymptoty funkce $f(x) = \frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x+1)(x-1)}$

$D(f) = \mathbb{R} - \{1, -1\}$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x}{x^2-1} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = \underline{\underline{\infty}}, \quad \lim_{x \to 1^-} \frac{x}{x^2-1} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = \underline{\underline{-\infty}} \quad \dots \quad \underline{\underline{x = 1}}$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x}{x^2-1} = \left[\frac{-1}{0^-}\right] = \underline{\underline{\infty}}, \quad \lim_{x \to -1^-} \frac{x}{x^2-1} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = \underline{\underline{-\infty}} \quad \dots \quad \underline{\underline{x = -1}}$$

Vodorovné asymptoty: $y = d$, $d \in \mathbb{R}$

- funkce f má v bodě ∞, resp. $-\infty$, vodorovnou asymptotu, jestliže

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = d, \text{ resp. } \lim_{x \to -\infty} f(x) = d$$

Př: Určete vodorovné asymptoty funkce

1) $f(x) = \frac{x+2}{3x-1}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+2}{3x-1} = \left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x(1+\frac{2}{x})}{x(3-\frac{1}{x})} = \frac{1}{3} \quad \dots \quad \underline{\underline{y = \frac{1}{3}}}$$

fce má asymptotu $y = \frac{1}{3}$ v bodě ∞ i v bodě $-\infty$.

2) $f(x) = \frac{x}{e^x}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0 \quad \dots$$

v bodě ∞ má fce asymptotu $\underline{\underline{y = 0}}$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^x} = \left[\frac{-\infty}{0}\right] = \lim_{x \to -\infty} x \cdot \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x} = -\infty \cdot \infty = -\infty \quad \dots$$

v bodě $-\infty$ fce nemá vodorovnou asymptotu

Šikmé asymptoty: $y = ax + b$, $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$

- existují, jestliže $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$
- $a = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax)$

Př: Určete šikmou asymptotu funkce

1) $f(x) = \frac{6x^2+2}{2x-1}$

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{6x^2+2}{2x-1}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{6x^2+2}{2x^2-x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2(6+\frac{2}{x^2})}{x^2(2-\frac{1}{x})} = \frac{6}{2} = 3$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{6x^2+2}{2x-1} - 3x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{6x^2+2-6x^2+3x}{2x-1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x(\frac{2}{x}+3)}{x(2-\frac{1}{x})} = \frac{3}{2}$$

$$y = 3x + \frac{3}{2}$$

2) $f(x) = 2x - \frac{\cos x}{x}$

$$\to \frac{k}{\pm\infty} = 0 \quad , \quad \cos x \in \langle -1, 1 \rangle$$

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x - \frac{\cos x}{x}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(2 - \frac{\cos x}{x^2}\right) = 2$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(2x - \frac{\cos x}{x} - 2x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(-\frac{\cos x}{x}\right) = 0$$

$$y = 2x$$

Poznámka:

1. svislé asymptoty = asymptoty bez směrnice

   vodorovné a šikmé asymptoty = asymptoty se směrnicí

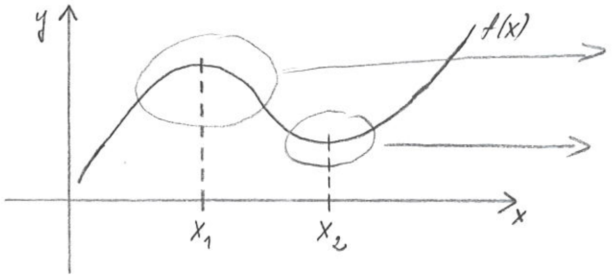
2. vodorovné asymptoty jsou zvláštní případ šikmých asymptot

EXTRÉMY FUNKCE

Věta: Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci $f'(x_0) > 0$, resp. $f'(x_0) < 0$, pak je funkce v bodě x_0 **rostoucí**, resp. **klesající**.

Věta: Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a má-li v intervalu (a, b) derivaci, která je kladná, resp. záporná, pak je f **rostoucí**, resp. **klesající**, na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Definice: Funkce f má v bodě $x_0 \in D(f)$ **ostré lokální minimum**, resp. **ostré lokální maximum**, jestliže existuje $P(x_0, \delta) \subset D(f)$ takové, že pro všechna $x \in P(x_0, \delta)$ platí $f(x) > f(x_0)$, resp. $f(x) < f(x_0)$.

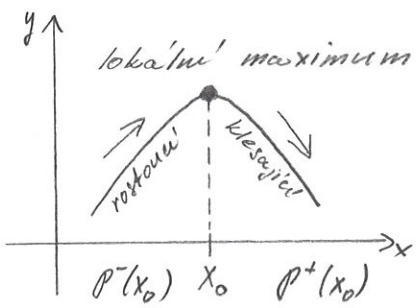


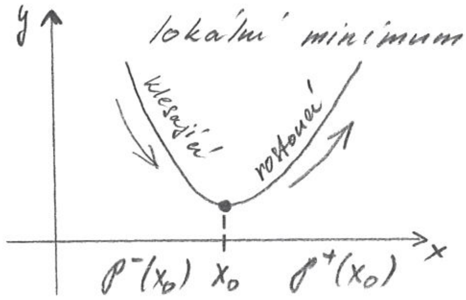
v x_1 lok. max : $f(x) < f(x_1)$

v x_2 lok. min : $f(x) > f(x_2)$

- lokální maximum a minimum = **lokální extrémy**
- funkce f může mít lokální extrémy
  a) v bodech, v nichž $f'(x) = 0$,
  b) v bodech, v nichž f nemá derivaci.
- Body, v nichž $f'(x) = 0$ se nazývají **stacionární body**.

Věta: Je-li funkce f spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a existuje-li okolí $P(x_0, \delta)$ tak, že f je v $P^-(x_0, \delta)$ rostoucí, resp. klesající, a v $P^+(x_0, \delta)$ klesající, resp. rostoucí, pak má f v bodě x_0 ostré lokální maximum, resp. minimum.





Věta: Je-li $f'(x_0) = 0$ a má-li funkce f v bodě x_0 druhou derivaci $f''(x_0) \neq 0$, pak má f v bodě x_0 ostrý lokální extrém a to:

- lokální minimum je-li $f''(x_0) > 0$,
- lokální maximum je-li $f''(x_0) < 0$.

Př: Určete lokální extrémy a intervaly monotonie funkce f.

1) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ $\qquad D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$

$f(1) = 1+1 = 2$

$f(-1) = -1-1 = -2$

$\nearrow \quad \searrow \quad \searrow \quad \nearrow$

$\oplus \quad -1 \quad \ominus \quad 0 \quad \ominus \quad 1 \quad \oplus$

$f'(2) = \frac{3}{4} > 0$ $\qquad f'(x) = 0 \ldots \ \underline{\underline{x = \pm 1}}$

v $[1,2]$ lokální minimum

v $[-1,-2]$ lokální maximum

v $(-\infty,-1), (1,\infty)$ rostoucí

v $(-1,0), (0,1)$ klesající

2) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ $\qquad D(f) = (0,\infty)$

$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$

$\nearrow \quad \searrow$

$0 \quad \oplus \quad e \quad \ominus$

$f'(1) = 1$

$f'(x) = 0 \ldots \quad 1 - \ln x = 0$

$\ln x = 1$

$\underline{\underline{x = e}}$

$f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$

v $[e, \frac{1}{e}]$ lokální maximum

v $(0,e)$ rostoucí

v (e,∞) klesající

3) $f(x) = (x^2+1)\cdot e^x$ $\qquad D(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 2x\cdot e^x + (x^2+1)\cdot e^x = e^x(x^2+2x+1) = e^x(x+1)^2$

$f'(x) = 0 \ldots \quad e^x(x+1)^2 = 0$

$x+1 = 0$

$\underline{\underline{x_{1,2} = -1}}$

$\nearrow \quad \nearrow$

$\oplus \quad -1 \quad \oplus$

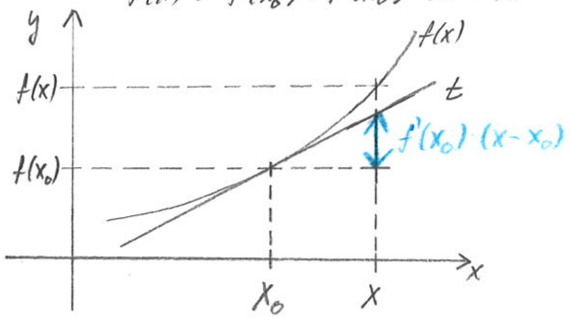
$f'(0) = 1 > 0$

Funkce nemá lokální extrémy a je rostoucí v celém $D(f)$.

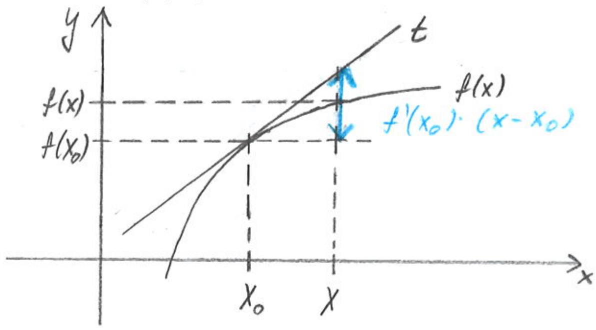
KONVEXNOST, KONKÁVNOST, INFLEXNÍ BODY

Definice: Funkce f je v bodě x_0 **ryze konvexní**, resp. **ryze konkávní**, jestliže pro všechna $x \in P(x_0, \delta)$ platí:
$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$, resp. $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$,
tj. graf funkce f leží v $P(x_0, \delta)$ nad tečnou, resp. pod tečnou sestrojenou v bodě $[x_0, f(x_0)]$.

konvexní
(nad tečnou)
$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$

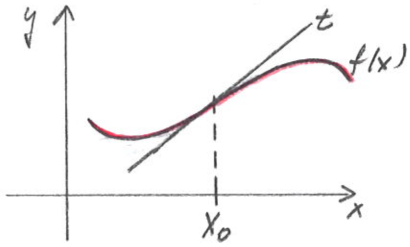


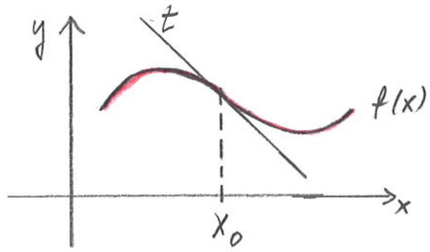
konkávní
(pod tečnou)
$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$



Věta: Má-li funkce f v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ druhou derivaci
1. $f''(x_0) > 0$, pak je f v bodě x_0 ryze konvexní,
2. $f''(x_0) < 0$, pak je f v bodě x_0 ryze konkávní.

Definice: **Inflexním bodem** nazýváme bod, ve kterém graf funkce přechází z polohy nad tečnou do polohy pod tečnou nebo obráceně.





- Pro inflexní bod x_0 platí:
  1. $f''(x_0) = 0$, $\quad f'''(x_0) \neq 0$
  2. v x_0 se mění znaménko $f''(x)$,
     tj. fce se mění z konvexní na konkávní nebo obráceně.

Př: Určete intervaly konvexnosti a konkávnosti a inflexní body pro funkci $f(x)$:

1) $f(x) = x \cdot \ln(x-1)$ $\qquad D(f) = (1, \infty)$ $\qquad x - 1 > 0$, $x > 1$

$$f'(x) = 1 \cdot \ln(x-1) + x \cdot \frac{1}{x-1} = \ln(x-1) + \frac{x}{x-1}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = \frac{x-1-1}{(x-1)^2} = \frac{x-2}{(x-1)^2}$$

$f''(x) = 0: \quad x - 2 = 0$

$x = 2$

$f(2) = 2 \cdot \ln 1 = 0$

$\cap \qquad \cup$

$1 \quad \ominus \quad 2 \quad \oplus$

$f''(3) = \frac{1}{4} > 0$

inflexní bod $[2, 0]$

konvexní v $(2, \infty)$

konkávní v $(1, 2)$