POLYNOMY

Př: Určete rozklad polynomu v $\mathbb{R}$, reálné kořeny a znaménko polynomu.

1) $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1 = x^2(x+1) - (x+1) = (x+1)(x^2-1) = (x+1)(x+1)(x-1) =$

postupné vytýkání

$= (x+1)^2(x-1)$ ← rozklad polynomu

$(x+1)^2 = 0 \qquad x-1 = 0$

$x_{12} = -1 \qquad x_3 = 1$ ← násobnost 1 (tj. lichá)

kořeny polynomu

násobnost 2 (tj. sudá)

Znaménko polynomu:

1. Kořeny polynomu ($x_{12} = -1$, $x_3 = 1$) rozdělí číselnou osu na intervaly $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$.
   Uvnitř těchto intervalů má polynom stále stejné znaménko, tedy je stále kladný nebo stále záporný.

2. Zvolíme libovolné reálné číslo, které není kořenem (v kořenech je polynom roven nule) a spočítáme jeho funkční hodnotu.
   (Číslo volíme tak, aby se funkční hodnota lehce spočítala.)

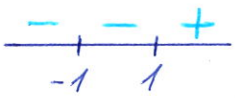
   např. pro $x = 0$ je $f(0) = 0^3 + 0^2 - 0 - 1 = -1 < 0$

   $0 \in (-1, 1) \Rightarrow$ v celém intervalu $(-1, 1)$ je polynom $f(x)$ záporný

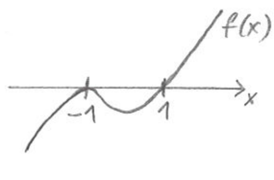
3. Znaménko polynomu se mění jen v kořenech liché násobnosti, tzn.:
   - kořeny LICHÉ násobnosti znaménko ZMĚNÍ
   - kořeny SUDÉ násobnosti znaménko NEZMĚNÍ

   $x_{12} = -1$ je kořen sudé násobnosti, proto znaménko nezmění a polynom je i v intervalu $(-\infty, -1)$ záporný

   $x_3 = 1$ je kořen liché násobnosti, proto znaménko změní a polynom je v intervalu $(1, \infty)$ kladný



Pozn.: Graf $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$



Sami řešte:

2) $f(x) = 2x^2 - x - 1$

3) $f(x) = x^7 + x^4$

4) $f(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9$

5) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 4$

6) $f(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - x^2 - x + 6$

7) $f(x) = x^5 + x^4 - x - 1$

8) $f(x) = 2x^5 + x^4 - 2x - 1$

9) $f(x) = x^6 - x^4 - x^2 + 1$

10) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$

11) $f(x) = x^5 - 4x^4 + 4x^3 + x^2 - 4x + 4$

12) $f(x) = x^7 + 2x^6 - x - 2$

13) $f(x) = x^4 + x^3 - 16x^2 - 16x$

14) $f(x) = 16x^4 - 8x^3 + 2x - 1$

15) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

K určení rozkladu polynomů použite metodu postupného vytýkání a vzorce:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$
$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

2) $f(x) = 2x^2 - x - 1 = 2\underbrace{(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}_{} = (x-1)(2x+1)$

rozklad

$2x^2 - x - 1 = 0$

$D = 1 + 8 = 9$

$x_{12} = \dfrac{1 \pm 3}{4} = \left\langle \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{array} \right\}$ kořeny oba jsou násobnosti 1

znaménko:

$+ \quad - \quad +$

$-\frac{1}{2} \quad 1$

✓ ✓

$x = 0 \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

$f(0) = -1 < 0$

3) $f(x) = x^7 + x^4 = x^4(x^3+1) = x^4(x+1)(x^2-x+1)$

kořeny: $x_{1234} = 0$, $x_5 = -1$

násobnost 4 násobnost 1

záporný diskriminant ⇒ v $\mathbb{R}$ nelze dál rozložit

znaménko:

$- \quad + \quad +$

$-1 \quad 0$

✓ ✗

$f(1) = 1 + 1 = 2 > 0$

4) $f(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9 = x^2(x+1) - 9(x+1) = (x+1)(x^2-9) = (x+1)(x+3)(x-3)$

$x_1 = -1,\ x_2 = -3,\ x_3 = 3$

$- \quad + \quad - \quad +$

$-3 \quad -1 \quad 3$

✓ ✓ ✓

$f(0) = -9 < 0$

5) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = x^2(x+2) + 2(x+2) = (x+2)(x^2+2)$

$x_1 = -2$

$- \quad +$

-2

✓

$f(0) = 4 > 0$

6) $f(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - x^2 - x + 6 = x^3(x^2+x-6) - (x^2+x-6) = (x^2+x-6)(x^3-1) =$

$= (x+3)(x-2)(x-1)(x^2+x+1)$

$x_1 = -3,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1$

$- \quad + \quad - \quad +$

$-3 \quad 1 \quad 2$

✓ ✓ ✓

$f(0) = 6 > 0$

7) $f(x) = x^5 + x^4 - x - 1 = x^4(x+1) - (x+1) = (x+1)(x^4-1) = (x+1)(x^2+1)(x^2-1) =$

$= (x+1)(x+1)(x-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)^2(x^2+1)$

$x_1 = 1,\ x_{23} = -1$

$- \quad - \quad +$

$-1 \quad 1$

✗ ✓

$f(0) = -1 < 0$

8) $f(x) = 2x^5 + x^4 - 2x - 1 = x^4(2x+1) - (2x+1) = (2x+1)(x^4-1) = (2x+1)(x^2+1)(x^2-1) =$

$= (2x+1)(x+1)(x-1)(x^2+1)$

$x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1$

$-\quad +\quad -\quad +$

$-1 \quad -\frac{1}{2} \quad 1$

✓ ✓ ✓

$f(0) = -1 < 0$

9) $f(x) = x^6 - x^4 - x^2 + 1 = x^4(x^2-1) - (x^2-1) = (x^2-1)(x^4-1) =$

$= (x+1)(x-1)(x^2+1)(x^2-1) = (x+1)(x-1)(x^2+1)(x+1)(x-1) =$

$= (x+1)^2(x-1)^2(x^2+1)$

$x_{12} = -1, \quad x_{34} = 1$

$+\quad +\quad +$

$-1 \quad 1$

× ×

$f(0) = 1 > 0$

10) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = x^4 - 1 - 2x(x^2-1) = (x^2+1)(x^2-1) - 2x(x^2-1) =$

$= (x^2-1)(x^2-2x+1) = (x+1)(x-1)(x-1)^2 = (x+1)(x-1)^3$

$x_1 = -1, \quad x_{234} = 1$

$+\quad -\quad +$

$-1 \quad 1$

✓ ✓

$f(0) = -1 < 0$

11) $f(x) = x^5 - 4x^4 + 4x^3 + x^2 - 4x + 4 = x^3(x^2-4x+4) + x^2 - 4x + 4 =$

$= (x^2-4x+4)(x^3+1) = (x-2)^2(x+1)(x^2-x+1)$

$x_{12} = 2, \quad x_3 = -1$

$-\quad +\quad +$

$-1 \quad 2$

✓ ×

$f(0) = 4 > 0$

12) $f(x) = x^7 + 2x^6 - x - 2 = x^6(x+2) - (x+2) = (x+2)(x^6-1) = (x+2)(x^3+1)(x^3-1) =$

$= (x+2)(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

$x_1 = -2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1$

$-\quad +\quad -\quad +$

$-2 \quad -1 \quad 1$

✓ ✓ ✓

$f(0) = -2 < 0$

13) $f(x) = x^4 + x^3 - 16x^2 - 16x = x(x^3 + x^2 - 16x - 16) = x[x^2(x+1) - 16(x+1)] =$

$= x(x+1)(x^2-16) = x(x+1)(x+4)(x-4)$

$x_1 = 0, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = -4, \quad x_4 = 4$

$+\quad -\quad +\quad -\quad +$

$-4 \quad -1 \quad 0 \quad 4$

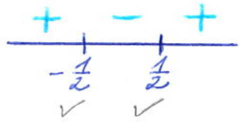
✓ ✓ ✓ ✓

$f(1) = 1 + 1 - 16 - 16 =$
$= -30 < 0$

14) $f(x) = 16x^4 - 8x^3 + 2x - 1 = 8x^3(2x-1) + 2x - 1 = (2x-1)(8x^3+1) =$

$= (2x-1)(2x+1)(4x^2-2x+1)$

$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{2}$



$f(0) = -1 < 0$

15) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 2(x^3+1) - 3x(x+1) = 2(x+1)(x^2-x+1) - 3x(x+1) =$

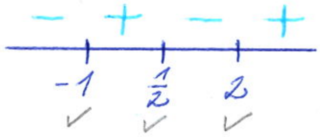
$= (x+1)(2x^2 - 2x + 2 - 3x) = (x+1)(2x^2 - 5x + 2) = 2(x+1)(x-2)(x-\frac{1}{2}) =$

$= (x+1)(x-2)(2x-1)$

$D = 25 - 16 = 9$

$x = \frac{5 \pm 3}{4} = \left\langle \begin{matrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \right.$

$x_1 = -1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = \frac{1}{2}$



$f(0) = 2 > 0$