POLYNOMY

Definice: Reálný polynom n-tého stupně je reálná funkce definovaná v $\mathbb{R}$ tvaru

$$f(x) = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

kde $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \dots, n$; $a_n \neq 0$.

a_k .... koeficienty polynomu
a_0 .... absolutní člen
$n = st\,f$ ... stupeň polynomu

Operace s polynomy

$$f(x) = P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x_k, \qquad g(x) = Q_m(x) = \sum_{l=0}^{m} b_l x^l$$

1) $f(x) \pm g(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k$ pro $n \geq m$ — sčítáme koeficienty u odpovídajících si mocnin

2) $r \cdot f(x) = \sum_{k=0}^{n} r a_k x^k$ pro $r \in \mathbb{R}$

3) $f(x) \cdot g(x) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k$, kde $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot b_{k-i}$ — násobíme každý sčítanec prvního polynomu všemi sčítanci druhého polynomu

– platí: $st(f+g) \leq \max\{st\,f, st\,g\}$

$$st(f \cdot g) = st\,f + st\,g$$

Př: $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 3x + 1$, $g(x) = 3x - 2$

$f(x) + g(x) = 2x^3 - 5x^2 - 1$
$f(x) \cdot g(x) = 6x^4 - 19x^3 + x^2 + 9x - 2$

4) Dělení polynomů:

Věta: Jsou-li P_n, Q_m polynomy stupňů $n \geq m > 0$, pak existují právě dva polynomy H_{n-m}, R_j (stupňů $n-m$, $j < m$), pro které platí

$$P_n = Q_m \cdot H_{n-m} + R_j, \quad \text{tj}$$

$$\frac{P_n}{Q_m} = H_{n-m} + \frac{R_j}{Q_m}, \quad \text{pokud } Q_m(x) \neq 0.$$

Q_m ... dělitel
H_{n-m} ... podílový polynom
R_j ... zbytek

$R_j = 0$ ... polynom P_n je dělitelný polynomem Q_m

Př: $(6x^4+7x^3-6x^2+8x-5):(2x^2-x+1) = 3x^2+5x-2$

$$\begin{array}{l} -(6x^4-3x^3+3x^2) \\ \hline \quad 10x^3-9x^2+8x-5 \\ \quad -(10x^3-5x^2+5x) \\ \hline \qquad -4x^2+3x-5 \\ \qquad -(-4x^2+2x-2) \\ \hline \qquad\quad x-3 \end{array}$$

$P_n(x) = P_4(x)$ $\qquad R_j(x) = R_1(x)$

$$\frac{6x^4+7x^3-6x^2+8x-5}{2x^2-x+1} = 3x^2+5x-2 + \frac{x-3}{2x^2-x+1}$$

$Q_m(x) = Q_2(x)$ $\qquad H_{n-m}(x) = H_2(x)$

zkouška – převedeme pravou stranu na společného jmenovatele

5) Rovnost polynomů: $\quad P_n = Q_m \iff$ 1. $n = m$
2. $a_i = b_i$, $\; i = 0, 1, \dots, n$

koeficienty u stejných mocnin jsou si rovny

Kořenové vlastnosti polynomů

Definice: Je-li P_n polynom stupně $n \geq 1$, pak
- číslo $x_0 \in \mathbb{C}$ nazveme **kořenem** polynomu P_n, jestliže platí $P_n(x_0) = 0$;
- číslo $x_0 \in \mathbb{C}$ nazveme **k-násobným kořenem** polynomu P_n, jestliže platí $P_n(x) = (x-x_0)^k \cdot Q_{n-k}(x)$, kde $Q_{n-k}(x_0) \neq 0$.
- Výraz $x - x_0$ nazýváme **kořenovým činitelem**.

1) V $\mathbb{C}$ má každý polynom n-tého stupně právě n kořenů (každý kořen počítáme tolikrát, jaká je jeho násobnost).
Platí: $P_n(x) = a_n(x-x_1) \cdot \ldots \cdot (x-x_n)$ … **rozklad polynomu na součin kořenových činitelů.**

2) S každým k-násobným kořenem $a+bi$ má polynom také k-násobný kořen $a-bi$.

3) Polynom lichého stupně má alespoň jeden reálný kořen.

4) $a_i \in \mathbb{Z}$, $i = 0, 1, \dots, n$ a kořen $x_0 = \frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, pak $p \mid a_0$, $q \mid a_n$.
$(x_0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_0 \mid a_0)$

5) Rozklad polynomu v $\mathbb{R}$:
$$P_n(x) = a_n(x-x_0)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-x_r)^{k_r} \cdot ((x-a_1)^2+b_1^2)^{l_1} \cdot \ldots \cdot ((x-a_s)^2+b_s^2)^{l_s},$$
kde $x_0, \dots, x_r$ jsou reálné kořeny násobnosti $k_1, \dots, k_r$;
$a_1+b_1 i, \dots, a_s+b_s i$ jsou komplexní kořeny násobnosti $l_1, \dots, l_s$
a platí $k_1 + \dots + k_r + 2l_1 + \dots + 2l_s = n$.

– součin polynomů tvaru:
- $(cx+d)^k$, $c \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$
- $(ax^2+bx+c)^l$, $a \neq 0$, $l \in \mathbb{N}$, $D = b^2-4ac < 0$

Př: $f(x) = (x-1)^2 (x+4)(2x-1)^3 \underbrace{(x^2+x+1)(5x^2+3)^2}$ → $D < 0$ nemají reálné kořeny

kořeny: $x_1 = 1$ … násobnost 2
$x_2 = -4$ … násobnost 1
$x_3 = \frac{1}{2}$ … násobnost 3

Hornerovo schéma

$P_n(x) = (x-c) \cdot H_{n-1}(x) + d$; $H_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$

	a_n	a_{n-1}	a_{n-3}	…	a_1	a_0
$x=c$	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	…	b_0	$d = P_n(c)$

$$
\begin{aligned}
b_{n-1} &= a_n \\
b_{n-2} &= cb_{n-1} + a_{n-1} \\
b_{n-3} &= cb_{n-2} + a_{n-2} \\
&\vdots \\
b_0 &= cb_1 + a_1 \\
d &= cb_0 + a_0
\end{aligned}
$$

Je-li $d = 0$, pak c je kořen polynomu $P_n(x)$

Př:
$$
\begin{aligned}
P_5(x) &= 2x^5 + x^4 - 5x^3 + x^2 - x + 2 \\
&= (x-1)(2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x - 2) \\
&= (x-1)(x-1)(2x^3 + 5x^2 + 3x + 2) \\
&= (x-1)(x-1)(x+2)(2x^2 + x + 1) \\
&= \underline{\underline{(x-1)^2 (x+2) \underbrace{(2x^2+x+1)}}}
\end{aligned}
$$

$D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -7 < 0$

možné celé kořeny: 1, −1, 2, −2

	2	1	−5	1	−1	2	
$x=1$	2	3	−2	−1	−2	0	je kořen
$x=1$	2	5	3	2	0		je kořen
$x=1$	2	7	10	12			není kořen
$x=-1$	2	3	0	2			není kořen
$x=2$	2	9	21	44			není kořen
$x=-2$	2	1	1	0			je kořen

Znaménko polynomu

Věta: Na změnu znaménka polynomu mají vliv pouze reálné kořeny liché násobnosti.

Př: $f(x) = x^3 (x-2)^5 (x+4)(x-5)^4 (x+1)^2 \cdot (x^2+9)$

− + + − + +

−4 −1 0 2 5

✓ x ✓ ✓ x

$f(1) = 1 \cdot (-1)^5 \cdot 5 \cdot (-4)^4 \cdot 2^2 \cdot 10 < 0$
\+ − + + + +

!

$$
\boxed{
\begin{aligned}
(a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2 \\
(a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \\
a^2 - b^2 &= (a+b)(a-b) \\
a^3 \pm b^3 &= (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)
\end{aligned}
}
$$

Tyto vzorce budeme využívat při hledání rozkladu polynomu na součin kořenových činitelů.

Př: Najděte kořeny, rozklad a znaménko polynomu

1, $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 3x + 2 = x^3(3x-2) - (3x-2) = (3x-2)(x^3-1) =$
$= \underline{\underline{(3x-2)(x-1)(x^2+x+1)}}$

$x_1 = \frac{2}{3}$
$x_2 = 1$

$+ \quad \frac{2}{3} \quad - \quad 1 \quad +$

$f(0) = 2$

2, $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4 = x^2(x-1) - 4(x-1) = (x-1)(x^2-4) =$
$= \underline{(x-1)(x-2)(x+2)}$

$x_1 = 1$
$x_2 = 2$
$x_3 = -2$

$- \quad -2 \quad + \quad 1 \quad - \quad 2 \quad +$

$f(0) = 4$

3, $f(x) = x^3 - 3x - 2$ ... možné kořeny: $\pm 1, \pm 2$

	1	0	−3	−2	
1	1	1	−2	−4	×
−1	1	−1	−2	0	✓
2	1	1	0		✓

$f(x) = (x+1)(x-2)(x+1) = \underline{\underline{(x+1)^2(x-2)}}$

$x_{1,2} = -1$
$x_3 = 2$

$- \quad -1 \quad - \quad 2 \quad +$

$f(0) = -2$

4, $f(x) = 3x^3 - 8x^2 + 7x - 2$ ... možné kořeny: $\pm 1, \pm 2$

	3	−8	7	−2	
1	3	−5	2	0	✓
1	3	−2	0		✓

$f(x) = \underline{\underline{(x-1)^2(3x-2)}}$

$x_{1,2} = 1$
$x_3 = \frac{2}{3}$

$- \quad \frac{2}{3} \quad + \quad 1 \quad +$

$f(0) = -2$