

POLYNOMY

Definice: Reálný polynom n -tého stupně je reálná funkce definovaná v \mathbb{R} tvaru

$$f(x) = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k,$$

kde $a_k \in \mathbb{R}$, $k=0, 1, \dots, n$; $a_n \neq 0$.

- a_k koeficienty polynomu
- a_0 absolutní člen
- $n = st f$ stupeň polynomu

Operace s polynomy

$$f(x) = P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad g(x) = Q_m(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$$

1) $f(x) \pm g(x) = \sum_{k=0}^n (a_k \pm b_k) x^k$ pro $n \geq m$ sčítáme koeficienty u odpovídajících si mocnin

2) $r \cdot f(x) = \sum_{k=0}^n r a_k x^k$ pro $r \in \mathbb{R}$

3) $f(x) \cdot g(x) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k$, kde $c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$ násobíme každý sčítanec prvního polynomu všemi sčítanci druhého polynomu

- platí: $st(f+g) \leq \max\{st f, st g\}$

$$st(f \cdot g) = st f + st g$$

Př: $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 3x + 1$
 $g(x) = 3x - 2$

$$f(x) + g(x) = 2x^3 - 5x^2 - 1$$
$$f(x) \cdot g(x) = 6x^4 - 19x^3 + x^2 + 9x - 2$$

4) Dělení polynomů:

Věta: Jsou-li P_n, Q_m polynomy stupňů $n \geq m > 0$, pak existují právě dva polynomy H_{n-m}, R_j (stupňů $n-m, j < m$), pro které platí

$$P_n = Q_m \cdot H_{n-m} + R_j, \quad tj$$

$$\frac{P_n}{Q_m} = H_{n-m} + \frac{R_j}{Q_m}, \quad \text{pokud } Q_m(x) \neq 0.$$

- Q_m ... dělitel
- H_{n-m} ... podílový polynom
- R_j ... zbytek

$R_j = 0$... polynom P_n je dělitelný polynomem Q_m

$$P_1: (6x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x - 5) : (2x^2 - x + 1) = 3x^2 + 5x - 2$$

$$\begin{array}{r} -(6x^4 - 3x^3 + 3x^2) \\ \hline 10x^3 - 9x^2 + 4x - 5 \\ -(10x^3 - 5x^2 + 5x) \\ \hline -4x^2 + 3x - 5 \\ -(-4x^2 + 2x - 2) \\ \hline x - 3 \end{array}$$

$$P_n(x) = P_4(x)$$

$$\frac{6x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x - 5}{2x^2 - x + 1} = \frac{3x^2 + 5x - 2}{1} + \frac{x - 3}{2x^2 - x + 1}$$

$$Q_m(x) = Q_2(x)$$

$$H_{n-m}(x) = H_2(x)$$

$$R_j(x) = R_1(x)$$

zkouška - převedeme pravou stranu na společného jmenovatele

- 5) Kořenost polynomů: $P_n = Q_m \Leftrightarrow$
1. $n = m$
 2. $a_i = b_i, i = 0, 1, \dots, n$
- koeficienty u stejných mocnin jsou si rovny

Kořenové vlastnosti polynomů

- Definice:** Je-li P_n polynom stupně $n \geq 1$, pak
- číslo $x_0 \in \mathbb{C}$ nazveme **kořenem** polynomu P_n , jestliže platí $P_n(x_0) = 0$.
 - číslo $x_0 \in \mathbb{C}$ nazveme **k-násobným kořenem** polynomu P_n , jestliže platí $P_n(x) = (x - x_0)^k \cdot Q_{n-k}(x)$, kde $Q_{n-k}(x) \neq 0$.
 - Výraz $x - x_0$ nazýváme **kořenovým činitelem**.

- 1) V \mathbb{C} má každý polynom n -tého stupně právě n kořenů (každý kořen počítáme tolikrát, jaká je jeho násobnost).
Platí: $P_n(x) = a_n(x - x_1) \dots (x - x_n) \dots$ rozklad polynomu na součin kořenových činitelů.
- 2) S každým k -násobným kořenem $a + bi$ má polynom také k -násobný kořen $a - bi$.
- 3) Polynom lichého stupně má alespoň jeden reálný kořen.
- 4) $a_i \in \mathbb{Z}, i = 0, 1, \dots, n$ a kořen $x_0 = \frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$, pak platí $q \mid a_n$.
($x_0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_0 \mid a_0$)

- 5) Rozklad polynomu v \mathbb{R} :

$$P_n(x) = a_n(x - x_0)^{k_1} \dots (x - x_r)^{k_r} \cdot ((x - a_1)^2 + b_1^2)^{l_1} \dots ((x - a_s)^2 + b_s^2)^{l_s}$$

kde x_0, \dots, x_r jsou reálné kořeny násobnosti k_1, \dots, k_r ;
 $a_i + b_i i, \dots, a_s + b_s i$ jsou komplexní kořeny násobnosti l_1, \dots, l_s
 a platí $k_1 + \dots + k_r + 2l_1 + \dots + 2l_s = n$.

- součin polynomů tvaru:
- $(ex + d)^k, e \neq 0, k \in \mathbb{N}$
 - $(ax^2 + bx + c)^l, a \neq 0, l \in \mathbb{N}, D = b^2 - 4ac < 0$

Pr: $f(x) = (x-1)^2(x+4)(2x-1)^3(x^2+x+1)(5x^2+3)^2$

korěny: $x_1 = 1$... násobnost 2
 $x_2 = -4$... násobnost 1
 $x_3 = \frac{1}{2}$... násobnost 3

$D < 0$
nemají reálné korěny

Hornerovo schéma

$P_n(x) = (x-c) \cdot H_{n-1}(x) + d$; $H_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0$

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0
$x=c$	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	...	b_0	$d = P_n(c)$

$b_{n-1} = a_n$
 $b_{n-2} = cb_{n-1} + a_{n-1}$
 $b_{n-3} = cb_{n-2} + a_{n-2}$
 \vdots
 $b_0 = cb_1 + a_1$
 $d = cb_0 + a_0$

Je-li $d=0$, pak c je kořen polynomu $P_n(x)$

Pr: $P_5(x) = 2x^5 + x^4 - 5x^3 + x^2 - x + 2$
 $= (x-1)(2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x - 2)$
 $= (x-1)(x-1)(2x^3 + 5x^2 + 3x + 2)$
 $= (x-1)(x-1)(x+2)(2x^2 + x + 1)$
 $= \underline{(x-1)^2(x+2)(2x^2+x+1)}$

$D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -7 < 0$

možné celé korěny: 1, -1, 2, -2

	2	1	-5	1	-1	2	
$x=1$	2	3	-2	-1	-2	0	je kořen
$x=-1$	2	5	3	2	0		je kořen
$x=2$	2	7	10	12			není kořen
$x=-2$	2	3	0	2			není kořen
$x=1$	2	9	21	44			není kořen
$x=-2$	2	1	1	0			je kořen

Znaménko polynomu

Věta: Na změnu znaménka polynomu mají vliv pouze reálné korěny liché násobnosti.

Pr: $f(x) = x^3(x-2)^5(x+4)(x-5)^4(x+1)^2(x^2+9)$

-	+	+	-	+	+
-4	-1	0	2	5	
✓	x	✓	✓	x	

$f(1) = 1 \cdot (-1)^5 \cdot 5 \cdot (-4)^4 \cdot 2^2 \cdot 10 < 0$

!

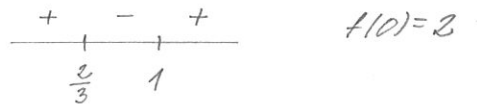
$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
 $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
 $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

Tyto vzorce budeme využívat při hledání rozkladu polynomu na součin kořenových činitelů.

Př: Najděte kořeny, rozklad a zmměnko polynomu

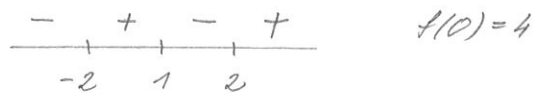
1) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 3x + 2 = x^3(3x-2) - (3x-2) = (3x-2)(x^3-1) = (3x-2)(x-1)(x^2+x+1)$

$x_1 = \frac{2}{3}$
 $x_2 = 1$



2) $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4 = x^2(x-1) - 4(x-1) = (x-1)(x^2-4) = (x-1)(x-2)(x+2)$

$x_1 = 1$
 $x_2 = 2$
 $x_3 = -2$



3) $f(x) = x^3 - 3x - 2$... možné kořeny: $\pm 1, \pm 2$

	1	0	-3	-2	
-1	-1	1	-2	-4	x
-1	1	-1	-2	0	✓
2	1	1	0		✓

$f(x) = (x+1)(x-2)(x+1) = (x+1)^2(x-2)$

$x_{1,2} = -1$
 $x_3 = 2$



4) $f(x) = 3x^3 - 8x^2 + 7x - 2$... možné kořeny: $\pm 1, \pm 2$

	3	-8	7	-2	
1	3	-5	2	0	✓
1	3	-2	0		✓

$f(x) = (x-1)^2(3x-2)$

$x_{1,2} = 1$
 $x_3 = \frac{2}{3}$

